TD3 - Décomposition d'un nombre en base b

Objectifs

Comprendre la décomposition dans une base quelconque. Comprendre l'algorithme de décomposition et l'implémenter en C.

Soit b un entier naturel fixé que l'on nommera base, $b > 1$. Alors

Théorème 1 *Tout entier $a \neq 0$ admet une unique décomposition dans la base b, c'est-à-dire qu'il se décompose de façon unique comme ceci :*

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i,$$

avec $\forall i, a_i \in [0, b-1]$ et $a_n \neq 0$.

Les chiffres qui "comptent" le plus, à savoir a_n, a_{n-1} sont appelés "chiffres de poids fort", et les chiffres qui comptent le moins sont appelés "poids faibles". On notera $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$[1] la décomposition du nombre a en base b.

Exemple 1 *La base 2 est formée des chiffres 0 et 1 appelés* **bits**. *Le nombre "dix"(c'est-à-dire $(10)_{10}$) s'écrit $(1010)_2$ car $10 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$.*

1 Petits exercices

Exercice 1 *Écrire tous les entiers de 0 à 10 en base 2.*

Exercice 2 *Écrire $(15)_{10}$ (le 15 usuel) en base 2. Même exo avec 21, 45, 128.*

Exercice 3 *Que valent 11 1001, 010101 (nombres écrits en base 2) en base 10 ?*

Exercice 4 *Quelques généralités :*
- *Quelle est la particularité des nombres pairs écrits en base 2 ? pourquoi ?*
- *Quelle est la particularité des multiples de 10 écrits en base 10 ? pourquoi ?*
- *Comment s'écrit b en base b ?*

Exercice 5 *La base 16 est aussi beaucoup utilisée en informatique. Les "chiffres" sont notés 0, 1, ...9, A, B, C, D, E, F.*
- *Comptez jusqu'à 20 en base 16.*
- *Convertir 100 en base 16.*
- *Que vaut $(21A9)_{16}$?*

Exercice 6 *Comment passer de la base 2 à la base 16 et inversement ? (Regarder la table des 15 premiers entiers écrits en base 2).*

[1] Quelquefois on note $\overline{a_n \ldots a_o}^{(b)}$

2 Codons !

On veut automatiser tout ça , pour cela on va faire l'exemple de la traduction base 10 vers base 2, soit M un nombre à traduire.

- On remarque que a_0 est le reste de la division euclidienne de M par 2 (c'est vrai, ça ?).
- Si $M_1 = \dfrac{M - a_0}{2}$ (nombre entier !), alors a_1 est le reste de la division euclidienne de M' par 2.
- ...
- Si $M_i < 2$, alors $n = i$ et a_n vaut M_i.

Traduisons tout cela en algos, c'est immédiat à partir de ce qu'on vient d'écrire.

EXERCICE 7 *Concevoir une action qui imprime les chiffres de la décomposition en base 2 d'un entier x passé en paramètre, en imprimant le poids le plus faible à gauche (puisqu'on calcule les poids les plus faibles en premier)*

EXERCICE 8 *Concevoir une action qui stocke dans un tableau les chiffres de la décomposition en base 2 d'un entier x passé en paramètre, puis les imprime les poids les plus faibles à droite.*

3 Base 2, version Tableaux

Maintenant on désire utiliser les chiffres de la décomposition en base 2, il est donc pratique de stocker la décomposition dans un tableau (de taille assez grande), que nous notons `bin`. La case `bin[i]` contiendra a_i. On va remplir le tableau de gauche à droite :

```
void base2(int n,int bin[MAX])
{
  bool continuer = true; int i = 0;
  int quo = n;  int reste = 0;

  while(continuer)
    {
      reste = quo %2;
      bin[i] = reste;
      quo = (quo-reste)/2;
      i = i+1;
      if (quo <= 1) {continuer = false; bin[i] = quo;}
    }
}
```

REMARQUE 1 *Quand on appelle cette procédure, il faut faire attention à ce que contiennent les cases du tableau. Il est fortement conseillé d'initialiser les cases avec -1 par exemple, comme cela on saura s'arrêter lors de l'affichage.*

REMARQUE 2 *Si ensuite on veut imprimer la décomposition, on pourra imprimer dans un sens ou dans l'autre, sans problème.*