Département IMA / 4A (S8)
Informatique Fondamentale 2010/2011

Laure Gonnord et Julien Forget
http://laure.gonnord.org/pro/

IF - quelques ajouts

1 [HS] Exponentiation d'entiers

1.1 La méthode élémentaire

L'algorithme le plus simple pour calculer x^n est basé sur les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{k+1} = x * x^k \quad \text{si } k > 0 \end{cases}$$

►Exo :

1. Écrire la fonction `puiss_naive` qui prend en argument deux entiers x et k et qui calcule x^k par cette méthode.
2. Donner en fonction de n le nombre de multiplications que réalise cet algorithme

1.2 L'exponentiation rapide

Cette méthode est basée sur l'exemple suivant :

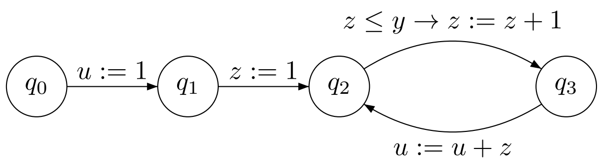
$$x^{23} = x * (x^2)^{11} = (x * x^2) * (x^4)^5 = (x * x^2 * x^4) * (x^8)^2 = x * x^2 * x^4 * x^{16}$$

►Exo :

1. En nommant les différentes parties de l'égalité : `res`, `puiss` et `k` judicieusement, obtenir l'invariant de boucle suivant : «A chaque tour de boucle, on a $res * puiss^k = x^n$». Comment obtenir res, $puiss$, k à la boucle suivante ? Quand s'arrête-t-on ?
2. Ecrire la fonction `puiss_dicho` qui prend en argument les entiers x et k et qui calcule x^k avec cet algorithme.
3. Donner en fonction de n le nombre de multiplications $C(n)$ que réalise cet algorithme. On trouvera $C(n) \leq 2 \log n$. On commencera par établir $C(n) \leq 2 + C(n/2)$ puis on posera $k = 2^n$.

2 Automates à compteurs

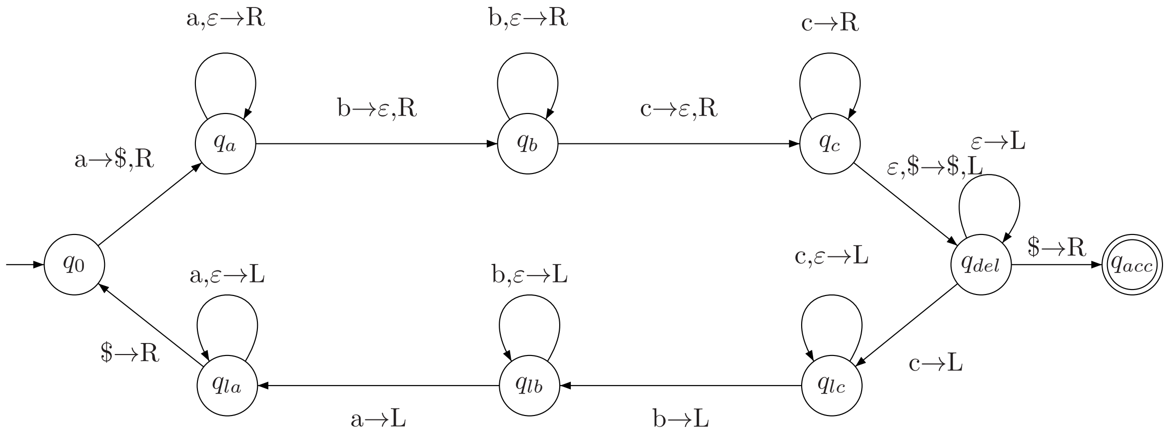
L'automate suivant :



calcule la fonction $\Sigma_{i=1}^{y} i$. Un automate à compteur affine peut donc calculer une fonction non affine. En fait, toute fonction polynômiale peut être calculé par un automate à compteur affine.

3 Machines de Turing

Machine qui "décide" (Cf demo du cours) . Machine qui décide $a^n b^n c^n$ (essayer sur *aabbcc* et *aabcc* :



Signification des états :

- q_0 =if a insert $ for left end
- q_a =1st pass verify a+
- q_c =1st pass verify c+
- q_b =1st pass verify b+
- q_{del}=deleted all char's ?
- q_{lc}=rewind thru c's
- q_{lb}=rewind thru b's
- q_{la}=rewind thru a's

Machine qui "calcule" D'après http://www.computing.dcu.ie/~josef/CA215/Exercises/turingqns.html Soit $\mathcal{M}$ la machine de turing avec le vocabulaire $\Sigma = \{a, b\}$, le vocabulaire de pile $\Gamma = \Sigma \cup \{B, Y\}$, d'états $\{q_0, \ldots q_8\}$, d'état final q_8, et de fonction de transition donnée par la table suivante :

état	Symbole	(état suivant,symbole,mouvement)
q_0	B	(q_1, B, D)
q_0	B	(q_1, B, D)
q_1	a	(q_1, a, D)
q_1	b	(q_1, b, D)
q_1	B	(q_2, B, G)
q_2	a	(q_3, B, D)
q_2	b	(q_5, B, D)
q_2	B	(q_8, B, I)
q_3	B	(q_4, a, D)
q_4	a	(q_4, a, D)
q_4	b	(q_4, b, D)
q_4	B	(q_7, a, G)
q_5	B	(q_6, b, D)
q_6	a	(q_6, a, D)
q_6	b	(q_6, b, D)
q_6	B	(q_7, b, G)
q_7	a	(q_7, a, G)
q_7	b	(q_7, b, G)
q_7	B	(q_2, B, G)

1. Sur l'entrée `BabBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB` , que retourne la machine ?
2. Sur l'entrée : `BbaaBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB` que retourne cette machine ?

Cette machine réalise le miroir !