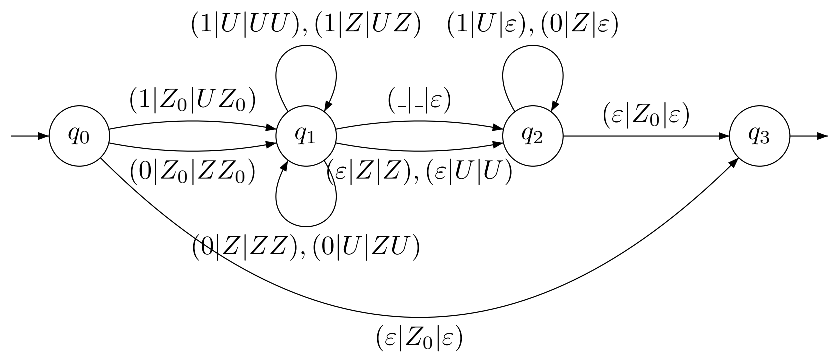
Un automate à pile pour les palindromes

Laure Gonnord

Soit $\mathcal{A} = (Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{0, 1\}.\Gamma, \Delta, q_0, Z_0, \{q_3\})$ l'automate à pile avec reconnaissance par état final, dont la relation de transition est donnée par le dessin ci-dessous :



Montrons que $L(\mathcal{A}) = \{u \in \Sigma^* \mid u = R(u)\}$, où R est la fonction miroir :

- Montrons $\{u \in \Sigma^* \mid u = R(u)\} \subseteq L(\mathcal{A})$: Prenons un mot u tel que $u = R(u)$:
  - Si u est de taille paire ($2n$). Si $u = \varepsilon$, $(q_0, u, Z_0) \vdash (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$ est un chemin victorieux dans $\mathcal{A}$. Sinon, on découpe $u = vR(v)$ avec $v = v_1.v_2.\dots.v_n$ de taille $n \geq 1$. Ensuite, on effectue les transitions :

    $$(q_0, u, Z_0) \vdash (q_1, v_2.\dots.v_n.R(v), X_1Z_0) \vdash^{n-1} (q_1, R(v), X_n.\dots.X_1Z_0)$$

    Les X_i désignent U si $v_i = 1$ ou Z si $v_i = 0$. Ces transitions dans l'état q_1 ont donc pour effet d'empiler les lettres de v dans l'ordre. Une fois que l'on a lu ce mot, on prend la transition instantanée $(q_1, (\varepsilon|Z|Z), q_2)$ ou $(q_1, (\varepsilon|U|U), q_2)$ suivant la lettre de haut de pile, et ensuite on lit les n lettres de w (on n'est jamais bloqué car les lettres de v ont été empilées par le dessus, ce qui fait que on les dépile à l'envers). Lorsqu'on a lu le mot, on effectue la transition $(q_2, (\varepsilon|Z_0|\varepsilon), q_3)$ qui est un état final(bien remarquer que le symbole Z_0 a été gardé pour ne pas avoir une pile vide prématurément). On a donc construit un chemin victorieux pour u dans $\mathcal{A}$, donc $u \in L(\mathcal{A})$.
  - Si u est de taille impaire, le chemin victorieux dans $\mathcal{A}$ est construit de façon similaire, sauf qu'au moment du "milieu" on lit une lettre, n'importe laquelle, sans rien faire.
- Montrons $L(\mathcal{A}) \subseteq \{u \in \Sigma^* \mid u = R(u)\}$: Soit $u \in L(\mathcal{A})$, comme $\mathcal{A}$ est un automate à reconnaissance par état final, on va regarder les caractéristiques des chemins finaux. Déjà, ε est reconnu par $\mathcal{A}$, et $\varepsilon = \varepsilon.R(\varepsilon)$. Ensuite, si $u \neq \varepsilon$ est reconnu par $\mathcal{A}$, c'est que le chemin victorieux passe par q_1 et q_2. Le passage de q_0 à q_1 n'impose rien sur la première lettre de u, et ensuite tant que l'on reste dans l'état q_1 on peut lire n'importe qu'elle lettre. La dernière configuration contenant q_1 est de la forme $(q_1, u_{n+1}w, X_n.X_{n-1}\dots X_1Z_0)$, où $X_i = \begin{cases} Z \text{si } u_i = 0 \\ U \text{si } u_i = 1 \end{cases}$. Ensuite, il y a deux cas :
  - Si on prend la transition $(\_, \_, \varepsilon)$, ie une des quatre transitions : $(U|U|\varepsilon)$, $(U|Z|\varepsilon)$, $(U|U|\varepsilon)$, $(U|Z|\varepsilon)$, alors cela signifie qu'il n'y a aucune contrainte pour la lettre u_{n+1}. Ensuite, les transitions de l'état q_2 imposent $u_{n+2} = u_n$ (on dépile dans le sens inverse), $u_{n+3} = u_{n-1}$ et ainsi de suite. Comme de plus la dernière transition vers q_3 ne mange pas de lettre du mot u, celui-ci u est forcément de la forme $v_1 \dots v_n \alpha v_n v_{n-1} \dots v_1$ (avec $\alpha \in \{0, 1\}$) donc $u = R(u)$.
  - Si on prend une des deux transitions $(\varepsilon|Z|Z)$ ou $(\varepsilon|U|U)$, alors cela signifie que $u_{n+1} = u_n$ et ensuite les transitions effectuées dans l'état q_2 imposent que u soit de la forme $v_1 \dots v_n v_n v_{n-1} \dots v_1$.

  Donc on a bien l'inclusion des deux langages.