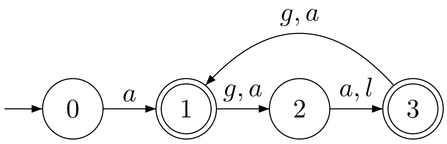
Département IMA / 4A (S8)
Informatique Fondamentale 2010/2011

Laure Gonnord et Julien Forget
http://laure.gonnord.org/pro/

Exercices de TD IF - Feuille 1

1 Automates finis et langages réguliers

Exercice 1 *Déterminer une formule rationnelle décrivant le langage reconnu par l'automate suivant :*



Exercice 2 *Donner des automates finis (déterministes) reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes ($A = \{a, b\}$) :*

- $(aab + aa + bba)^*$;
- a^*b ;
- $\varepsilon + (a + aab)^* + a^*(aab)^*$.

Exercice 3 *Donner des automates finis (déterministes ou pas) reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes ($A = \{0, 1\}$) :*

- *Tous les mots qui finissent par* 00
- *Tous les mots qui contiennent* 000
- *Tous les mots de taille* ≥ 2 *et dont l'avant-dernier caractère est* 1.

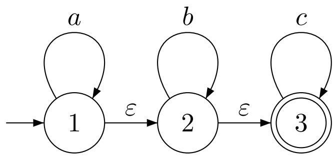
Exercice 4 *Donner un automate fini déterministe reconnaissant les lignes de commentaires en C (l'alphabet est l'ensemble des caractères ASCII raisonnables). On commencera par "rappeler" la syntaxe précise des commentaires !*

Exercice 5 *Soit $A = \{a, b\}$. Construire un automate déterministe reconnaissant le langage constitué des mots contenant un nombre pair de a, et un nombre de b non divisible par 3.*

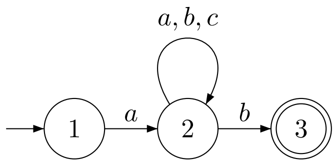
Exercice 6 *Donner un automate déterministe reconnaissant les mots sur $A = \{1, 2, 3\}$ formant une suite (finie) croissante.*

Exercice 7 *Donner une expression rationnelle correspondant aux langages reconnus par les automates suivants, puis les déterminiser (si besoin est) :*

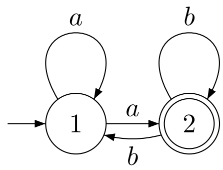
- $A = \{a, b, c\}$



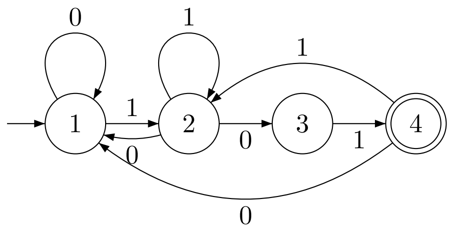
– $A = \{a, b, c\}$



– $A = \{a, b\}$



EXERCICE 8 *Donner une expression rationnelle décrivant le langage reconnu par l'automate suivant ($A = \{0, 1\}$) :*



EXERCICE 9 *Si $w_1 = a_1 \dots a_p$ et $w_2 = b_1 \dots b_q$, le mélange (shuffle) de w_1 et w_2, noté $w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$ est l'ensemble des mots de la forme $c_1 \dots c_{p+q}$, où chaque c_i vaut $a_{\varphi(i)}$ ou $b_{\psi(i)}$, avec φ et ψ strictement croissantes (φ et ψ sont des applications partielles...). On peut également définir $w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$ comme l'ensemble des mots de la forme $m_1 \dots m_{2k}$, avec $m_i \in A^*$ tels que $w_1 = m_1 m_3 \dots m_{2k-1}$ et $w_2 = m_2 m_4 \dots m_{2k}$.*

Si L_1 et L_2 sont deux langages, leur mélange est la réunion des $w_1 \sqcup\!\sqcup w_2$, pour $w_1 \in L_1$ et $w_2 \in L_2$.

Montrer que si L_1 et L_2 sont reconnaissables, alors $L_1 \sqcup\!\sqcup L_2$ est également reconnaissable.

EXERCICE 10 *En pseudo-code, écrire des programmes testant :*

– *l'égalité de deux langages définis par des expressions rationnelles ;*
– *l'inclusion de $\mathcal{L}(e_1)$ dans $\mathcal{L}(e_2)$;*
– *l'égalité $\mathcal{L}(e_1) = A^*$.*

EXERCICE 11 *Barman et pieuvre*

Un barman aveugle avec des gants de boxe joue au jeu suivant avec un client : quatre verres sont placés aux 4 directions d'un plateau circulaire (N,E,S,O). Ils peuvent être à l'endroit ou à l'envers, et le but du jeu, pour le barman, consiste à les mettre tous à l'endroit ou tous à l'envers : le client arrête alors le jeu. A chaque étape, le client peut tourner le plateau, puis le barman retourne un ou deux verres (adjacents ou opposés).

Montrer que le barman a une tactique gagnante, et déterminer le nombre de coups minimal dans le pire des cas.

2 Grammaires, Automates à pile et langages hors contexte

EXERCICE 12 *Quel langage est engendré par la grammaire* $G = (N, T, P, S)$ *avec :*
- $N = \{S, A, B, C, D\}$
- $T = \{a\}$
- $P = \{S \to BAB\} \cup \{BA \to BC\} \cup \{CB \to AAB\} \cup \{CA \to AAC\} \cup \{A \to a\} \cup \{B \to \varepsilon\}$.

EXERCICE 13 *Quels langages engendrent les grammaires suivantes ?*
1. $G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aS|bA, A \to bA|c\}$.
2. $G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aaS|aa\}$.
3. $G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aSaaS|aaa\}$

EXERCICE 14 *Donner des grammaires pour exprimer les langages suivants :*
1. *Les mots sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *qui sont égaux à leur mot miroir.*
2. *Les mots sur* $\{a, b\}$ *contenant autant de a que de b.*
3. *Les mots sur* $\{a, b, c\}$ *contenant autant de a que de b.*
4. $\{a^n b^m c^m d^n, n, m \geq 0\}$.

EXERCICE 15 *Soit* $\Sigma = \{0, 1\}$. *Soit l'automate à pile* $P = (Q, \Sigma, \Delta, \Gamma, q_0, Z_0, \{q_2\})$ *avec* $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Gamma = \{Z_0, X\}$, *et* Δ *la fonction de transition représentée par le tableau suivant :*

état	*lecture*	*pile*	*nouvel état*	*à empiler*
q_0	1	Z_0	q_0	X
q_0	1	X	q_0	XX
q_0	0	Z_0	q_2	Z_0
q_0	0	X	q_1	ε
q_1	0	Z_0	q_2	Z_0
q_1	0	X	q_1	ε
q_2	0	Z_0	q_2	Z_0

- *Quel langage est reconnu par cet automate à pile avec reconnaissance par état final ?*
- *et avec reconnaissance par pile vide ?*

EXERCICE 16 *Si u est un mot,* $R(u)$ *désigne son miroir. Construire des automates à pile (si possible déterministes) reconnaissant les langages suivants (sur l'alphabet* $\{0, 1\}$*) :*
- $\{u \in \Sigma^*, u$ *contient autant de 0 que de 1*$\}$
- $\{u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, u = vR(v)\}$
- $\{u \in \Sigma^*, u = R(u)\}$

EXERCICE 17 *Définissez et dessinez des automates à pile (déterministes si possible) pour chacun des langages engendrés par les grammaires suivantes :*
1. $G_1 = (N, T, P, S)$ *avec :*
   - $N = \{S, A\}$
   - $T = \{a, b\}$
   - $P = \{S \to aAA\} \cup \{A \to bS|; aS|a\}$.
2. $G_2 = (N, T, P, S)$ *avec :*
   - $N = \{S, A, B, C\}$
   - $T = \{a, b\}$
   - $P = \{S \to aAa\} \cup \{A \to Sb|bBB\} \cup \{B \to abb|aC\} \cup \{C \to aCa|\varepsilon\}$.

3. $G_3 = (N, T, P, S)$ *avec :*

- $N = \{S, X\}$
- $T = \{0, 1\}$
- $P = \{S \to 0X\} \cup \{X \to X1|1\}$.

EXERCICE 18 *Trouver des grammaires (non algébriques) qui engendrent les langages suivants :*

- $\{u \in \{0,1\}^*, \exists v \in \Sigma^*, u = vv\}$
- $\{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$