Département IMA / 4A (S8)
Informatique Fondamentale 2011/2012

Laure Gonnord
http://laure.gonnord.org/pro/

Exercices de TD IF - Feuille 2 Automates à piles et grammaires

Grammaires générales

EXERCICE 1 *Quel langage est engendré par la grammaire* $G = (N, T, P, S)$ *avec :*
- $N = \{S, A, B, C, D\}$
- $T = \{a\}$
- $P = \{S \to BAB\} \cup \{BA \to BC\} \cup \{CB \to AAB\} \cup \{CA \to AAC\} \cup \{A \to a\} \cup \{B \to \varepsilon\}$.

EXERCICE 2 *Quels langages sont engendrés par les grammaires suivantes ?*
1. $G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aS|bA, A \to bA|c\}$.
2. $G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aaS|aa\}$.
3. $G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$ *avec* $P = \{S \to aSaaS|aaa\}$

EXERCICE 3 *Donner des grammaires pour exprimer les langages suivants :*
1. *Les mots sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *qui sont égaux à leur mot miroir.*
2. *Les mots sur* $\{a, b\}$ *contenant autant de a que de b.*
3. *Les mots sur* $\{a, b, c\}$ *contenant autant de a que de b.*
4. $\{a^n b^m c^m d^n, n, m \geq 0\}$.

EXERCICE 4 *Trouver des grammaires (non algébriques) qui engendrent les langages suivants :*
- $\{u \in \{0, 1\}^*, \exists v \in \Sigma^*, u = vv\}$
- $\{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$

Automates à Piles

EXERCICE 5 *Soit* $\Sigma = \{0, 1\}$. *Soit l'automate à pile* $P = (Q, \Sigma, \Delta, \Gamma, q_0, Z_0, \{q_2\})$ *avec* $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Gamma = \{Z_0, X\}$, *et* Δ *la fonction de transition représentée par le tableau suivant :*

état	*lecture*	*pile*	*nouvel état*	*à empiler*
q_0	1	Z_0	q_0	X
q_0	1	X	q_0	XX
q_0	0	Z_0	q_2	Z_0
q_0	0	X	q_1	ε
q_1	0	Z_0	q_2	Z_0
q_1	0	X	q_1	ε
q_2	0	Z_0	q_2	Z_0

- *Quel langage est reconnu par cet automate à pile avec reconnaissance par état final ?*
- *et avec reconnaissance par pile vide* (q_2) *?*

EXERCICE 6 *Source : http://www-pequan.lip6.fr/~graillat/teach/caldec/td4.pdf Soit l'automate avec alphabet de ruban* $= \{a, b\}$ *et alphabet de pile* $\{Z_0, A, B\}$, *état final* f *et la fonction de transition :*

état	*lecture*	*pile*	*nouvel état*	*à empiler*
q_0	a	Z_0	q_1	AAZ_0
q_0	b	Z_0	q_2	BZ_0
q_0	ε	Z_0	f	ε
q_1	a	A	q_1	AAA
q_1	b	A	q_1	ε
q_1	ε	Z_0	q_0	Z_0
q_2	a	B	q_3	ε
q_2	b	B	q_2	BB
q_3	ε	B	q_1	ε
q_3	ε	Z_0	q_1	AZ_0

- *Vérifier que abb et bab sont reconnus par l'automate.*
- *Décrire le contenu de la pile après lecture de* b^7a^4.
- *Quel langage est reconnu par cet automate à pile avec reconnaissance par état final* f *?*

EXERCICE 7 *Si* u *est un mot,* $R(u)$ *désigne son miroir. Construire des automates à pile (si possible déterministes) reconnaissant les langages suivants (sur l'alphabet* $\{0, 1\}$*) :*
- $\{u \in \Sigma^*, u \text{ contient autant de 0 que de 1}\}$
- $\{u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, u = vR(v)\}$
- $\{u \in \Sigma^*, u = R(u)\}$

Grammaires classiques

EXERCICE 8 *Écrire* de la façon la plus simple possible *la grammaire des expressions bien parenthésées. Construire un arbre de dérivation pour le "mot"* `(((a))(a))`.

EXERCICE 9 *Écrire une grammaire qui génère les expressions "à la Lisp" :*
- *un entier est une expression*
- *si* e_1, $e_2 \dots e_k$ $(k \geq 2)$ *sont des expressions, alors* $(+e_1e_2 \dots e_k)$ *et* $(\times e_1e_2 \dots e_k)$ *sont des expressions.*

EXERCICE 10 *Écrire une grammaire pour reconnaître les expressions polynômiales.*

EXERCICE 11 *On considère une grammaire décrivant des expressions arithmétiques :*

```
Z -> E#
E -> F E'
E' -> + F E' | - F E' | eps
F -> i | (E)
```

- *Vérifier qu'une expression arithmétique ne peut être dérivée que d'une seule façon.*
- *Vérifiant que l'on peut dériver une expression arithmétique en la lisant de gauche à droite.*
- *Rajouter le * et le moins unaire.*