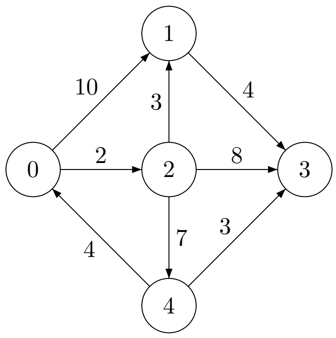
Département IMA / 4A (S8)
Informatique Fondamentale 2012/2013

Laure Gonnord
http://laure.gonnord.org/pro/

Graphes, Floyd Warshall, calculs



On commence par coder la matrice d'adjacence pondérée, avec des 0 dans les cases $m[i][i]$, le poids de l'arête (i, j) si elle existe dans $m[i][j]$, et ∞ sinon.

$$d^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 & +\infty & +\infty \\ 0 & +\infty & 4 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 3 & 0 & 8 & 7 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & +\infty \\ 4 & +\infty & \boldsymbol{+\infty} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$d^{-1}[i][j]$ est le plus cours chemin de i à j en passant par des noeuds de numéro ≤ -1, donc en passant par aucun autre noeud que i et j. En particulier, comme il n'y a pas de chemin direct de 4 à 2, la case $d^{-1}[4][2]$ contient $+\infty$. (en gras)

Calculons d^0, en s'autorisant donc de passer par le noeud numéro 0. La case $d^1[4, 2]$ devra donc contenir 6, qui est la taille du chemin en passant par 0. On a donc bien

$$d^0_{4,2} = Min\{d^{-1}_{4,2}, d^{-1}_{4,0} + d^{-1}_{0,2}\}$$

En continuant les calculs on obtient la matrice :

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 & 14 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 4 & 14 & \mathbf{6} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on trouve successivement

$$d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 & 14 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 4 & 14 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 9 & 9 \\ \infty & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 9 & 9 \\ \infty & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 9 & 9 \\ \infty & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \mathbf{11} & 3 & 0 & 7 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice des plus courts chemins du graphe. On vérifie par exemple en voyant que le plus court chemin de 2 à 0 est bien 11.

Conclusion Dans le cours, il fallait lire (si on numérote les noeuds du graphe en commençant par 0) :

- d^k chemins en passant par des noeuds de numéros $\leq k$
- d^{-1}=matrice adjacence initiale
- $d^k_{x,y} = min\{d^{k-1}_{x,y}, d^{k-1}_{x,k} + d^{k-1}_{k,y}\}$