Correction rédigée d'exos de la feuille 1

4 octobre 2006

Exercice 3

1. Règles pour définir le `repeat` sans le `while` : il faut rajouter les cas `true` et `false` :
   R1 Si $\mathcal{B}[b]\sigma' = tt$ alors : $\dfrac{(S,\sigma) \to \sigma'}{(\texttt{repeat } S \texttt{ until } b,\sigma) \to \sigma'}$
   R2 Si $\mathcal{B}[b]\sigma' = ff$ alors : $\dfrac{(S,\sigma) \to \sigma' \quad (\texttt{repeat } S \texttt{ until } b,\sigma') \to \sigma''}{(\texttt{repeat } S \texttt{ until } b,\sigma) \to \sigma''}$
2. Soit (S_1) = `repeat S until b` et (S_2) = `S;if b then skip else (repeat S until b)`. Montrons $(a) \equiv (b)$
   - "$s_1 \Rightarrow s_2$" Soient σ et σ' tels que $(S_1,\sigma) \to \sigma'$:
     - Si $\mathcal{B}[b]\sigma = tt$, alors la règle R1 du `repeat` dit que $(S,\sigma) \to \sigma'$, donc

$$\dfrac{(S,\sigma) \to \sigma' \qquad \dfrac{(\texttt{skip},\sigma') \to \sigma'}{(\texttt{if } b \texttt{ then skip else } ...),\sigma') \to \sigma'}}{(S;\texttt{if } b \texttt{ then skip else } (\texttt{repeat } S \texttt{ until } b),\sigma) \to \sigma'}$$

       est un arbre de preuve pour $(S_2,\sigma) \to \sigma'$.
     - Si $\mathcal{B}[b]\sigma = ff$, alors la règle R2 du repeat donne l'existence de σ_1 tel que $(S,\sigma) \to \sigma_1$ et $(\texttt{repeat } S \texttt{ until } b,\sigma_1) \to \sigma'$, donc :

$$\dfrac{(S,\sigma) \to \sigma_1 \qquad \dfrac{(\texttt{repeat } S \texttt{ until } b),\sigma_1) \to \sigma'}{(\texttt{if } b \texttt{ then skip else } (\texttt{repeat } S \texttt{ until } b),\sigma_1) \to \sigma'}}{(S;\texttt{if } b \texttt{ then skip else } (\texttt{repeat } S \texttt{ until } b),\sigma) \to \sigma'}$$

       est un arbre de preuve pour $(S_2,\sigma) \to \sigma'$.
   - "$s_2 \Rightarrow s_1$" : Démo similaire .
3. Soit P un programme contenant une commande `repeat`, alors en prenant F définie de la façon suivante :

$$F(S_1) = \begin{cases} S_1 & \text{si } S_1 \neq \texttt{repeat} \\ S;\texttt{while } \neg b \texttt{ do } S & \text{si } S_1 = (S;\texttt{repeat } S \texttt{ until } b) \end{cases}$$

   Pour montrer que c'est correct, on montre que les sémantiques sont équivalentes d'une façon similaire à la précédente.

Exercice 5

1. $S = \big((S_1;S_2);S_3\big) \equiv S' = \big(S_1;(S_2;S_3)\big)$: attention bien faire la différence entre les deux arbres syntaxiques différents et la sémantique équivalente, ie on doit montrer :

$$\forall \sigma, \sigma', (S,\sigma) \rightarrow \sigma' \text{ ssi } (s',\sigma) \rightarrow \sigma'$$

   - Soient σ, σ' telles que $(S,\sigma) \rightarrow \sigma'$, alors par définition de la sémantique de la séquence, on a l'existence d'un état σ_1 tel que :

$$\begin{align} \big(S_3,\sigma_1\big) &\rightarrow \sigma' \tag{1} \\ \big((S_1;S_2),\sigma\big) &\rightarrow \sigma_1 \tag{2} \end{align}$$

     avec (2) on obtient par définition de la séquence $S_1;S_2$ l'existence d'un état σ_2 tel que :

$$\begin{align} \big(S_2,\sigma_2\big) &\rightarrow \sigma_1 \tag{3} \\ \big(S_1,\sigma\big) &\rightarrow \sigma_2 \tag{4} \end{align}$$

     avec (1), (3) et (4) on reconstruit la séquence pour démontrer S'
   - Dans l'autre sens, à faire en exo.