

# Constructions sur les langages réguliers

## 1 L'automate miroir

Soit  $L$  un langage d'états finis. On note  $\tilde{L}$  l'ensemble des mots qui s'écrivent comme le miroir d'un mot de  $L$ , c'est-à-dire :

$$\tilde{L} = \{\alpha_n \dots \alpha_1 | \alpha_1 \dots \alpha_n \in L\}$$

Montrons que  $\tilde{L}$  est d'états finis.

**REMARQUE 1** L'intuition de la construction est que si un mot est dans le langage miroir, alors il se lit "à l'envers" dans l'automate initial, en partant d'un état final et en terminant dans l'état  $q_0$ .

**Plus formellement** Comme  $L$  est un langage d'états finis, alors il existe un automate fini le reconnaissant, donc, quitte à le déterminer, on peut dire qu'il existe un certain automate déterministe  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$ . Notons  $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  cet automate ( $\delta$  est une fonction, c'est à dire qu'à tout couple  $(q, a)$  elle associe un unique état successeur  $q'$ ). Sur la figure 2, on décrit les flèches à l'envers (flèches en bleu).

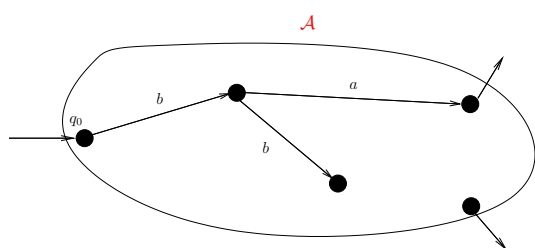


FIG. 1 – Automate reconnaissant  $L$

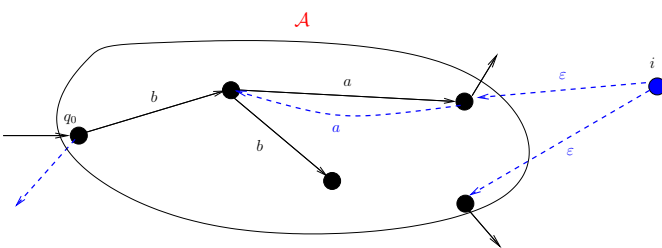


FIG. 2 –  $L$ , à l'envers

On voit immédiatement que pour avoir un unique état initial, il faut créer un nouvel état, avec une variable fraîche, disons  $i$ , qui pointe par epsilon-transition vers les états finaux de  $\mathcal{A}$ . Lorsqu'on lit une lettre (disons  $a$ ) "à l'envers" à partir d'un certain état  $q$  de  $\mathcal{A}$ , alors on peut obtenir plusieurs états  $q'$  tels que  $\delta(q', a) = q$ . Mais ce n'en est pas un problème, au pire on obtient un automate non déterministe. donc, on obtient l'automate  $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, i, \Delta, \{q_0\})$  avec :

$$\Delta = \{(q, \alpha, q') \mid \delta(q', \alpha) = q\} \cup \{(i, \varepsilon, q_f) \mid q_f \in F\}$$

Il reste maintenant à montrer que  $\mathcal{A}'$  reconnaît effectivement  $\tilde{L}$ . On montre par récurrence sur la taille de  $w$  qu'il existe un chemin étiqueté par  $w$  dans  $\mathcal{A}$  ssi il existe un chemin étiqueté par  $\tilde{w}$  dans  $\mathcal{A}'$ .

## 2 Les langages $\text{racine}(L)$ et $1/2L$

Soit  $\frac{1}{2}L = \{u \mid \exists v, |v| = |u|, u.v \in L\}$  et  $\text{racine}(L) = \{u \mid u^2 \in L\}$ .

Pour  $L$  rationnel, on va montrer que ces deux langages sont rationnels. Pour l'intuition, on va se référer à  $\text{racine}(L)$ . L'idée est de lire sur l'automate initial  $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  le mot  $u$  à partir de  $q_0$ , et de tous les états  $q$ . On va donc construire  $n = |Q|$  automates  $\mathcal{A}'_q$  de la façon suivante :

- Les états seront des 2-vecteurs d'éléments de  $Q$ , c'est-à-dire des  $\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}$ .
- L'état initial de l'automate  $\mathcal{A}'_q$  est l'état  $\begin{pmatrix} q_0 \\ q \end{pmatrix}$ .
- Les états terminaux de de l'automate  $\mathcal{A}'_q$  sont les états  $\begin{pmatrix} q \\ q_f \end{pmatrix}$  avec  $q_f \in F$ .

- Une transition étiquetée par  $\alpha$  existe entre les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} q'_i \\ q'_j \end{pmatrix}$  ssi  $\delta(q_i, \alpha) = q'_i$  et  $\delta(q_j, \alpha) = q'_j$ .

Enfin, si on prend  $\mathcal{A}' = \bigcup_{q \in Q} \mathcal{A}'_q$ , alors on obtient un automate reconnaissant  $\text{racine}(L)$ . Pourquoi? Parce que si un mot est reconnu par  $\mathcal{A}'$ , alors il existe un  $q$  tel que l'automate  $\mathcal{A}'_q$  reconnait  $u$  (construction de l'union). Par construction,  $\delta^*(q_0, u) = q$  et  $\delta(q, u) \in F$ , ce qui signifie que  $u.u \in L$ , c'est ce qu'on voulait. La réciproque se fait de façon similaire.

Pour  $1/2L$ , on fait de même sauf pour les fonctions de transition : une transition étiquetée par  $\alpha$  existe entre les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} q'_i \\ q'_j \end{pmatrix}$  ssi  $\delta(q_i, \alpha) = q'_i$  et il existe  $\beta \in \Sigma$ , tel que  $\delta(q_j, \beta) = q'_j$ . (pour garder la même longueur).