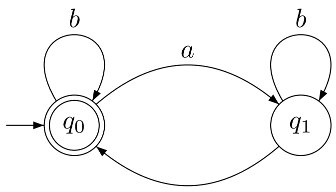
Éléments de correction du DS de MCAL, MIAGE

Cristian Ene et Laure Gonnord

20 mars 2006

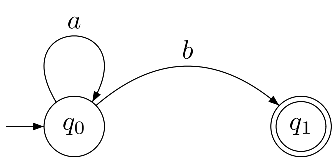
Exercice 1

1. Nombre pair de a : Soit $\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, q_0, \delta, \{q_1\})$, avec δ fonction de transitions donnée par le dessin ci-dessous.



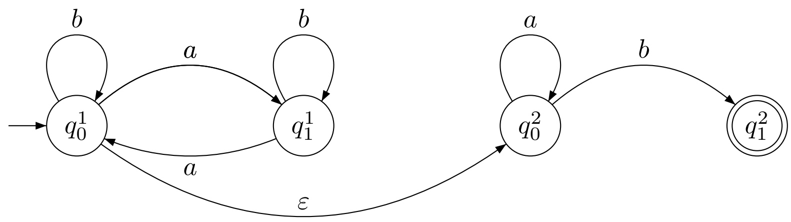
   (cet automate est déterministe) Alors $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$. Démo similaire à celle du DM.

2. $\mathcal{A}_2$:



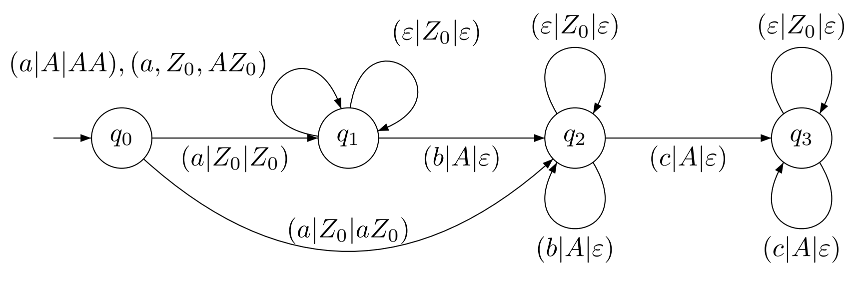
   On montre que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = L_2$, en montrant par exemple que si on est dans l'état q_0, alors on n'a lu que des a en un nombre aussi grand que l'on veut, et on passe en q_1 en lisant un seul b.

3. Pour la concaténation, voir le cours (automate non déterministe) :



Exercice 2

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$ l'automate à pile qui reconnaît par pile vide suivant :



Cet automate est déterministe malgré les epsilon-transitions, car lorsqu'on lit une epsilon-transition, c'est qu'il y a Z_0 sur la pile, et alors aucune des autres alternatives ne peut être prise.

L'idée de cet automate est d'empiler $N-1$ caractères de pile A, où N est le nombre de a du mot lu, et ensuite de dépiler ces caractères A à chaque fois que l'on lit un b ou un c. Les différents états (sans retour) empêchent de relire des a après avoir lu le premier b, et empêchent de relire des b après avoir lu l'éventuel premier c. Les différentes transitions de la forme $(\varepsilon|Z_0|\varepsilon)$ permettent de ne passer à pile vide que lorsque le non-terminal Z_0 apparaît au dessus.

Plus précisément, soit $L = \{a^{n+m+1}b^nc^m\}$. Alors :

- $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$: Soit u un mot de L, alors il s'écrit $a^{n+m+1}b^nc^m$ et un chemin victorieux dans $\mathcal{A}$ est :

  $$(q_0, u, Z_0) \vdash (q_1, a^{n+m}b^nc^m, Z_0) \vdash^{n+m} (q_1, b^nc^m, A^{n+m}Z_0) \vdash^n (q_2, c^m, A^mZ_0) \vdash^m (q_3, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$$

- $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$: soit u reconnu par $\mathcal{A}$ par pile vide. Alors comme les seules transitions qui enlèvent Z_0 de la pile sont les transitions $(\varepsilon|Z_0|\varepsilon)$, on termine en faisant l'une d'elles :
  - Si c'est la première, cela signifie que $u = a$ (dès que l'on a lu un autre a, la caractère Z_0 n'est plus en haut de pile).
  - Si c'est la deuxième (sur l'état q_2), cela signifie que l'on a lu un certain nombre de a, disons $N > 1$, que l'on a empilé $N-1$ fois le caractère A à l'aide de la transition $(q_1, (a|A|AA), q_1)$, puis que l'on a dépilé les $N-1$ A en utilisant la transition $(q_2, (b|A|\varepsilon), q_2)$, et donc forcément u est de la forme a^Nb^{N-1}.
  - Si c'est la troisième, on montre de façon similaire que forcément u est de la forme $a^Nb^Mc^{N-1-M}$.

  Dans les trois cas, u est dans L, ce qui termine la démonstration.

Exercice 3

Supposons L régulier. D'après le lemme de l'étoile, il existe une constante N telle que pour tout mot $w \in L$ de taille supérieure à N, il existe une décomposition $w = xyz$ avec $|xy| \leq N$ et $y \neq \varepsilon$ tel que pour tout entier k, le mot xy^kz est dans L.

Soit $w = a^{2N}b^Nc^N$. Ce mot est de taille supérieure à N et donc d'après le lemme de l'étoile il s'écrit $w = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$ et $\forall k \in \mathbb{N}, xy^kz \in L$. D'après cette décomposition (faire un dessin), forcément x et y n'ont que des a, disons $x = a^{n_1}$ et $y = a^{n_2}$, et par suite $z = a^{n_3}b^Nc^N$ (n_3 peut être nul). On a donc $n_1 + n_2 + n_3 = 2N$ ainsi que $n_2 > 0$. Prenons maintenant $w' = xy^2z$:

- d'après le lemme de l'étoile, $w' \in L$.
- d'autre part $w' = a^{n_1+2n_2+n_3}b^Nc^N$, donc $w' \notin L$ car $n_1 + 2n_2 + n_3 > n_1 + n_2 + n_3 = 2N$.

Il y a donc une contradiction donc L n'est pas régulier.

Exercice 4

1. Vrai. L est régulier, et ajouter un nombre fini de mots revient à ajouter un langage régulier. Or les langages réguliers sont stables par union.
2. Vrai. On sait que si A et B sont réguliers, alors $C = A \setminus B$ l'est aussi (car $C = A \cap \bar{B}$ et on a stabilité par intersection et complémentation des langages réguliers).
3. Faux. Si on prend $L = \emptyset$, et que l'on ajoute tous les mots qui ont autant de a que de b, on trouve le langage des mots qui contiennent autant de a que de b, qui n'est pas régulier (voir cours et td).
4. Vrai. On a $L \cap \{a^nb^n\} = L'$ et on sait que l'intersection d'un langage algébrique avec un langage régulier est algébrique.
5. Vrai. Les mots qui ont autant de a que de b forment un langage algébrique, et l'union d'un langage algébrique et d'un langage régulier est algébrique.