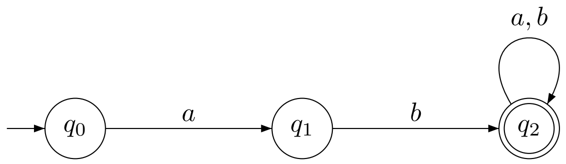
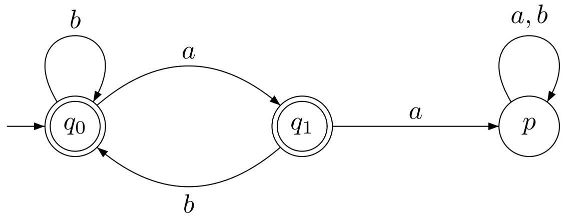
Éléments de correction de l'exam de MCAL, MIAGE
Avril 2006

Exercice 1

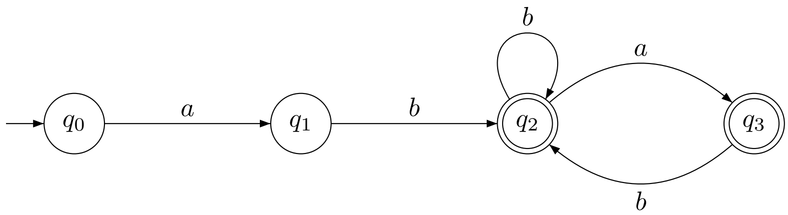
1. Mots commençant par ab :



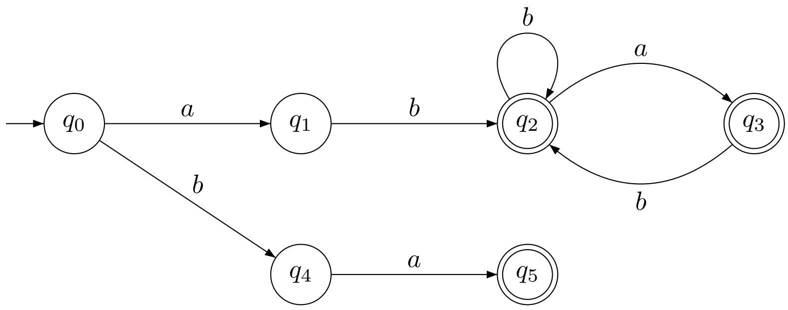
(cet automate est déterministe)
Les mots ne contenant pas aa sont reconnus par l'automate suivant (on peut supprimer l'état puits si on veut) :



Et en faisant le produit on trouve comme automate pour L_1 :



2. On ajoute le mot $\{ba\}$ et on obtient facilement l'automate :



qui n'a aucune epsilon-transition et est déterministe.

Exercice 2

- L n'est pas un langage d'états finis, et la démonstration avec le lemme de l'étoile se fait sans difficulté en prenant par exemple $w = a^{2N}b^{3N}$ avec N la constante fournie par le lemme de l'itération.
- Le langage L est algébrique : on construit par exemple un automate à pile qui empile 3 fois le symbole de pile A quand il rencontre un a et qui dépile 2 fois ce même symbole quand il rencontre un b.

Exercice 3

1. FAUX. Regarder $\{a^n b^n\} \cup \Sigma^* = \Sigma^*$.
2. FAUX. Regarder $\{a^n b^n c^n\} \cup \Sigma^* = \Sigma^*$.
3. FAUX. Considérer $L = \{a^n b^n\} \cup \{a\} \cup \{b\}$, L^* est régulier (c'est Σ^*) alors que L ne l'est pas.

Exercice 4

1. La machine retourne `BabbaBBBBBBBB`.
2. On trouve `BbaaaabBBBBBBBB`.
3. Sur le mot `BuBBBB` la machine retourne `BuvBBBB` avec v le mot miroir de u.

Exercice 5

5.1

1. Les deux mots font partie du langage
2. Description rapide de la machine :
   - **Phase 1** Dans l'état q_0, on va chercher la première parenthèse fermante : pour cela, on ignore les parenthèses ouvrantes (en allant à droite), et dès que l'on a trouvé une parenthèse fermante, on marque F (comme fermante) et on passe en q_1 en revenant sur la gauche.

     $$(q_0, (, D, (, q_0) \text{ et } (q_0,), G, F, q_1)$$

   - **Phase 2** On revient chercher la parenthèse ouvrante correspondante, qui est la première ouvrante rencontrée :

     $$(q_1, (, D, O, q_0)$$

     et si on n'en trouve pas, on passe dans un état q_3 bloquant :

     $$(q_1, B, G, B, q_3)$$

     (il n'est pas utile de traiter le cas où l'on rencontre une fermante, puisque ça ne doit pas arriver.
   - On recommence, pour cela il faut ignorer les O et les F lorsqu'on parcout le ruban, donc on ajoute les règles :

     $$(q_0, O, D, O, q_0) \text{ et } (q_0, F, D, F, q_0) \text{ pour la phase 1}$$

     $$(q_1, O, G, O, q_1) \text{ et } (q_1, F, G, F, q_1) \text{ pour la phase 2}$$

   - Si lors d'une phase 1 (ie dans l'état q_0) on rencontre un blanc, on se met dans un état q_2 et on va vérifier qu'il ne reste aucune parenthèse ouvrante à gauche, ce qui est le cas si on rencontre un blanc. On passe alors dans un état final. Si on rencontre une parenthèse ouvrante, on passe dans un état q_3 bloquant :

     $$(q_0, B, G, B, q_2) \text{ et } (q_2, F, G, F, q_2) \text{ et } (q_2, O, G, O, q_2) \text{ et } (q_2, B, G, B, q_f) \text{ et } (q_2, (, G, (, q_3)$$

5.2

- Exécutions : on ne détaille pas ici les étapes de calcul, dans le premier cas on se retrouve dans q_t avec $y = 9$, $x = 3$ et $i = 3$. Dans le deuxième cas, on a $y = 16$.
- On obtient assez facilement :

  2 $P_{q_1} = P_{q_0} \wedge y = 0$

  3 $P_{q_2} = x = x_0 \wedge i \leq x \wedge y = \frac{(i-1)i}{2}$

  4 $P_{q_3} = x = x_0 \wedge i < x \wedge y = \frac{i(i+1)}{2}$