

Complexité (MIF15)

Cahier d'exercices, automne 2015

Table des matières

1 Techniques de Preuves	3
1.1 Preuve par construction	3
1.2 Preuve par contradiction/l'absurde	3
1.3 Preuve par récurrence, ou induction	3
2 Machines de Turing	5
2.1 Déplacements sur le ruban	5
2.2 Reconnaissance de langages	6
2.2.1 Langages rationnels	6
2.2.2 Langages hors-contexte	6
2.3 Copies et effacements	6
2.4 Puissance d'expressivité : l'exemple des carrés	7
2.5 Arithmétique : des MT qui calculent	7
2.5.1 Calcul binaire	7
3 Fonctions récursives primitives	8
3.1 Quelques résultats simples	8
3.2 Boucles / Test de Primalité	9
3.3 Exploration bornée	9
3.4 La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive	10
3.5 Fonctions μ -récursives, prédictats μ -récursifs	10
3.5.1 Fonctions numériques	10
3.5.2 Prédictats	11
3.6 Des machines de Turing pour les fonctions récursives primitives	11
3.7 Minimisation non-bornée	11
4 Indécidabilité	13
4.1 Trois problèmes indécidables	13
4.2 Indécidabilité du Problème de Correspondance de Post (PCP)	13
4.3 Machines alternatives	14
4.3.1 Machines à piles	14
4.3.2 Machines à compteur	15
5 Langages P, langages NP, NP-complétude	16
5.1 Retour aux machines de Turing	16
5.2 Quelques problèmes P	16
5.3 Appartenance à P via réduction polynomiale	16
5.4 NP-Complétude	16
5.5 Quelques petites réductions "faciles"	17
5.6 Deux réductions plus compliquées	17
A Références Bibliographiques	19
A.1 Machines de Turing	19
A.2 Indécidabilité	19
A.3 NP-complétude	19

Thème 1

Techniques de Preuves

Objectifs

- Connaître quelques techniques de preuve et savoir les mettre en oeuvre.
- Savoir raisonner sur quelques objets “informatiques”.

1.1 Preuve par construction

De nombreux théorèmes stipulent qu’un objet particulier existe. Une technique pour prouver un tel théorème est de montrer comment construire cet objet. Cette technique est appelée preuve par construction.

EXERCICE 1.1 ► Application : graphes

Un graphe non orienté G est défini par un couple (S, A) , S étant un ensemble de sommets, A un ensemble d’arêtes (c’est-à-dire un ensemble de parties de S à deux éléments). On appelle le degré d’un sommet le nombre d’arêtes reliées à ce sommet. Un graphe est dit k -régulier si tous ses sommets sont de degré k . Prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Pour tout entier n pair, $n > 2$, il existe un graphe 3-régulier composé de n sommets.

1.2 Preuve par contradiction/l’absurde

Cette technique consiste à supposer que le théorème est faux, puis à montrer que cette hypothèse conduit systématiquement à une conséquence fausse, appelée contradiction.

EXERCICE 1.2 ► Irrationalité de $\sqrt{2}$

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

EXERCICE 1.3 ► Relation binaire

Soit R une relation binaire définie sur un ensemble fini A , et soient a et b deux éléments de A . S’il existe un chemin de a vers b dans R , alors il existe un chemin de longueur au plus $|A|$.

1.3 Preuve par récurrence, ou induction

Cette technique de preuve permet de montrer que tous les éléments d’une suite infinie (ou pas) vérifient une certaine propriété P . Elle comporte deux étapes :

- étape de base : on montre que $P(k)$ est vraie ;
- pas d’induction : pour $i \geq k$, on montre que si $P(i)$ est vraie, alors $P(i + 1)$ est également vraie.

EXERCICE 1.4 ► Maths

Montrer que $n^4 - 4n^2$ est divisible par 3.

En informatique, les récurrences peuvent servir à prouver la correction de certains algorithmes, comme le montre l’exemple suivant :

EXERCICE 1.5 ► Récurrence simple, correction d’un tri de tableaux

On rappelle l’algorithme du tri-insertion :

```
PROCEDURE tri_selection(t)
D/R : t : Vecteur[N] d’Entiers
L : i, ideb, imin : Entiers
POUR ideb DE 0 A N-2 FAIRE
    imin <- ideb
```

```

POUR i DE ideb + 1 A N-1 FAIRE
  SI t[i] < t[imin] ALORS
    imin <- i
  FSI
FPOUR
  permuter(t, ideb, imin)
FPOUR
FPROCEDURE

```

On considère acquis la correction de la procédure `permuter`, c'est à dire que l'appel `permuter(t, i, j)` réalise l'échange entre les éléments d'indice i et j du tableau t .

1. Prouver la propriété suivante :

$P(\text{ideb})$ = “à la fin de la boucle (externe) d'indice ideb , le sous-tableau $t[0.. \text{ideb}]$ contient les $\text{ideb}+1$ plus petits éléments du tableau initial et ce, dans l'ordre croissant.”

2. Conclure.

L'induction structurelle reprend la technique précédente, en l'adaptant au cas des structures de données récursives.

EXERCICE 1.6 ► Induction structurelle, tri sélection sur les listes

On considère la définition des listes suivante : une liste est :

- soit vide ;
- soit un élément suivi d'une liste.

Reprenons un exemple de LIF3 (Scheme) :

```

(define maximum ; -> entiers
  (lambda (myl) ; liste de nombres supposee non vide
    (if (null? (cdr myl))
        (car myl)
        (max (car myl) (maximum (cdr myl)))))

(define supprime ; -> liste
  (lambda (e l) ; e atome, l liste
    (cond ((null? l) '())
          ((eq? e (car l)) (cdr l))
          (else (cons (car l) (supprime e (cdr l))))))

(define tri-max ; -> liste de nb triee en ordre croissant
  (lambda (l) ; l liste de nb
    (if (or (null? l) (null? (cdr l)))
        l
        (let ((m (maximum l)))
          (append (tri-max (supprime m l)) (list m))))))

```

1. Comment peut-on raisonner par induction sur les listes ?
2. Montrer par induction structurelle sur myl que la fonction `maximum` retourne bien ce que l'on veut.
3. Que fait la fonction `supprime` ?
4. En supposant la fonction `supprime` correcte, montrer par induction structurelle la correction de `trimax`.

Thème 2

Machines de Turing

Objectifs

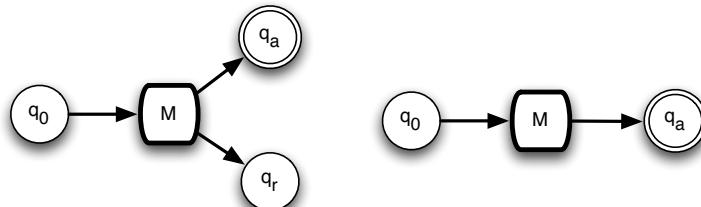
L'objectif de ce sujet est de faire appréhender par la construction "manuelle" la puissance d'expressivité du modèle des machines de Turing.

Compétences :

- Savoir réaliser des exécutions d'une machine de Turing donnée, et savoir caractériser le langage associé.
- Savoir construire des machines de Turing simples.
- Connaître le pouvoir d'expressivité de ces machines.

d'après un TD de B. Salvy et D. Monniaux, dont on reprend une partie du texte.

Conventions, sous-programmes. On s'efforcera de programmer les machines de Turing de façon *modulaire*¹, en réutilisant des machines déjà écrites. Pour cela, une machine sera symbolisée par l'un des deux schémas



selon que la transition vers l'état de refus (si cet état existe) est réutilisée pour pointer vers un autre état ou non.

L'utilisation de machines comme sous-programmes impose une spécification très précise de leurs droits. Ainsi, sauf indication contraire, les machines de Turing n'écriront jamais à gauche de la position initiale de leur tête de lecture, le mot donné en entrée sera toujours borné par un # à gauche et à droite, et lorsqu'une machine de Turing s'arrêtera sur son état d'acceptation, sa tête de lecture sera d'abord revenue à sa position initiale.

Alphabets Dans la suite, l'alphabet de travail Γ est constitué de l'alphabet Σ (les mots reconnus sont dans Σ^*) et du caractère blanc noté #.

Machines réutilisables Les machines F_x et B_x présentées ci-dessous sont utilisables par "copier coller". On rappelle leur spécification dans l'exercice 2.1.

2.1 Déplacements sur le ruban

La programmation de machines de Turing pousse à déplacer fréquemment la tête de lecture sur le ruban, par exemple jusqu'aux extrémités. Les deux sous-routines suivantes seront donc très utiles.

EXERCICE 2.1 ▶ Forward/Backward

Écrire une machine de Turing F_x (pour *Forward*) qui avance la tête de lecture sur le ruban jusqu'à la première occurrence de la lettre $x \in \Gamma$ ² et recule alors sur le caractère précédent. Cette machine refuse les mots qui ne contiennent pas x . Écrire de même la fonction symétrique B_x (pour *Backward*) qui recule et termine sur le premier caractère suivant l'occurrence de x précédente.

EXERCICE 2.2 ▶ Forward/Modif

Écrire une machine de Turing $ModifF_{a,b}$ qui transforme les a en b , les b en a , de gauche à droite, retourne à la position initiale et s'arrête.

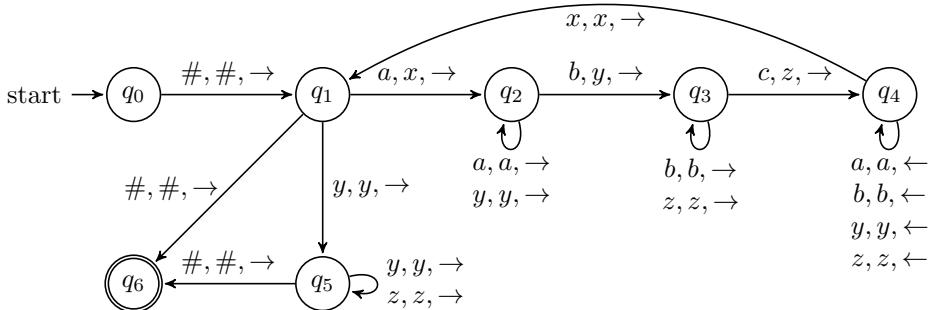
1. Attention, nous n'utiliserons pas la composition sous forme de branchements conditionnels évoquée en cours, mais uniquement la composition "copier-coller" décrite ici.

2. Oui, $x = \#$ est possible

2.2 Reconnaissance de langages

EXERCICE 2.3 ▶ MT mystère

Quel langage reconnaît la machine de Turing ci-dessous ?



2.2.1 Langages rationnels

Les machines de Turing restreintes dont les transitions sont toutes de la forme $\delta(q_1, \ell) = (q_2, \ell, \rightarrow)$ sont classiquement appelées automates finis déterministes. Elles reconnaissent les langages rationnels, dont l'exercice suivant donne un exemple typique.

EXERCICE 2.4 ▶ Sous-mot et co

Écrire une machine de Turing acceptant les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ qui contiennent le sous-mot aab et se terminent par un b , et refusant tous les autres mots sur Σ . Les langages rationnels servent à exprimer les “expressions régulières” qui sont utilisés dans de nombreux éditeurs de texte pour effectuer de la recherche avancée. Ne pouvant ni écrire, ni revenir en arrière, ces automates sont incapables de reconnaître des langages dont les mots ont une structure de dépendance à longue portée, mais permettent des recherches très rapides et avec peu de mémoire dans de très grands textes comme le génome.

EXERCICE 2.5 ▶ Dans le même genre

Construire des machines de Turing reconnaissant les langages suivants :

- $L = a^* ba^* b$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ contient } abc \text{ mais pas } bb\}$

2.2.2 Langages hors-contexte

Les langages de programmation ne sont pas des langages rationnels, mais sont souvent algébriques (ou “hors contexte”, de l'anglais “context-free”), c'est-à-dire une généralisation des langages rationnels, qui permet de reconnaître des mots bien parenthésés (penser à des *begin...end* ou *if...fi*). Pour les reconnaître, il est indispensable de pouvoir mémoriser ce qu'on a déjà lu. On utilise pour cela une pile (par exemple on empile *begin* et lorsqu'on lit *end* on dépile *begin*), ou la fonctionnalité des machines de Turing à écrire sur le ruban.

EXERCICE 2.6 ▶ Parenthèses

Écrire une machine de Turing acceptant les mots bien parenthésés sur l'alphabet $\{a, (), \}\$. Ces mots ont le même nombre de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes, et aucun préfixe ne possède plus de parenthèses fermantes que d'ouvrantes. (Indication : on peut effacer le mot initialement présent sur le ruban).

EXERCICE 2.7 ▶ Dans le même genre

Construire des machines de Turing reconnaissant les langages suivants :

- $L = a^n b^n$
- $L = a^{2^n}$

2.3 Copies et effacements

EXERCICE 2.8 ▶ Delete

Écrire deux machines D et D' (pour *delete*) qui prennent en entrée un mot ℓw où $\ell \in \Sigma = \{a, b\}$ et w est un mot sur Σ , et s'arrêtent avec le mot w sur leur ruban. Il faut donc décaler d'une lettre toutes les lettres de w . La machine D termine avec sa tête de lecture sur le premier caractère de w . La machine D' termine avec sa tête de

lecture sur le premier caractère suivant w , mais ne devra pas supposer que le premier caractère à gauche de ℓ est un blanc (cela sera utile pour des utilisations comme sous-programme plus loin).

EXERCICE 2.9 ▶ Delete until

Écrire une machine D_ℓ qui prend en entrée un mot sur Σ et en efface tous les caractères jusqu'au premier $\ell \in \Sigma$ inclus.

EXERCICE 2.10 ▶ Insert

À l'inverse, écrire trois machines l_ℓ , l'_ℓ et l''_ℓ (pour *insert*) qui prennent en entrée un mot w sur l'alphabet $\{a, b\}$, et s'arrêtent avec respectivement les mots ℓw , $w\ell$, $w\ell$ sur leurs rubans. La différence entre l'_ℓ et l''_ℓ est que cette dernière laisse sa tête de lecture sur le caractère suivant $w\ell$.

EXERCICE 2.11 ▶ Copy

Écrire une machine Copy_ℓ^m qui prend un mot de la forme $w_1 \ell w_2$ où w_1 et w_2 sont des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$, ℓ et m sont des lettres différentes de **B** dans $\Gamma \setminus \Sigma$, et s'arrête avec le mot $w_1 \ell w_2 m w_1$ sur son ruban.

2.4 Puissance d'expressivité : l'exemple des carrés

Les machines de Turing peuvent calculer/reconnaître plus que les langages algébriques.

Un mot W est un *carré* s'il existe un mot w tel que $W = ww$. L'ensemble des carrés sur un alphabet Σ n'est pas un langage algébrique (donc non reconnaissable avec un automate à pile, ce qui se démontre avec le lemme de la double étoile). Cependant, il est possible de les reconnaître par une machine de Turing effectuant des aller-retours.

EXERCICE 2.12 ▶ MT pour les carrés avec

Écrire une machine de Turing reconnaissant les mots de la forme $w\#w$ où w est un mot de l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

EXERCICE 2.13 ▶ Découper un mot en deux

Écrire une machine de Turing qui n'accepte que des mots de longueur paire, et laisse sur son ruban le mot qui lui a été donné en entrée avec un caractère $\# \notin \Sigma$ inséré entre ses deux moitiés.

EXERCICE 2.14 ▶ Finalement...

Combiner ces deux machines pour écrire une machine reconnaissant les carrés.

2.5 Arithmétique : des MT qui calculent

Jusqu'ici les calculs se sont limités à des manipulations élémentaires sur des mots. Cependant, en réutilisant les machines précédentes, et en codant le k -uplet d'entiers (n_1, \dots, n_k) par le mot $a^{n_1+1}ba^{n_2+1}b\dots a^{n_k+1}$, il est également possible de leur faire calculer beaucoup d'opérations arithmétiques. (On aurait pu aussi prendre des 0 et des 1, mais il sera plus facile de réutiliser les machines précédentes sur cet alphabet $\{a, b\}$.)

EXERCICE 2.15 ▶ Zéro

Écrire une machine de Turing prenant en entrée le codage d'un entier et s'arrêtant avec le codage de 0 (On dira qu'elle *calcule* 0).

EXERCICE 2.16 ▶ Successeur unaire

Écrire une machine de Turing qui calcule la fonction prenant en entrée un entier n et renvoyant $n + 1$.

EXERCICE 2.17 ▶ Addition unaire

Écrire une machine de Turing qui calcule la fonction prenant en entrée deux entiers n et m et renvoyant $n + m$.

2.5.1 Calcul binaire

EXERCICE 2.18 ▶ Successeur binaire

Écrire une machine de Turing qui calcule la fonction prenant en entrée un entier n (en base 2) et renvoyant $n + 1$.

Thème 3

Fonctions récursives primitives

Objectifs

Les fonctions récursives primitives¹ ont été introduites par Gödel dans son travail sur l'incomplétude. Elles permettent de décrire des fonctions dont il est clair que le calcul termine toujours. Elles correspondent ainsi aux fonctions qui peuvent être calculées sans l'instruction "while" dans un langage typé comme Pascal, c'est-à-dire avec des "if-then-else" et des "for i:=1 to n". L'objectif de ce TD est de se convaincre de cette expressivité et d'observer une partie de ses limitations.

Informellement, ces fonctions sont celles que l'on peut définir sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels par récurrence. L'ensemble de ces fonctions est défini par induction.

Définition. Une fonction $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ est *récursive primitive* si elle est :

- Une des fonctions renvoyant $0 : \text{zero}_{\mathbb{N}} : (x_1 \dots x_n) \rightarrow 0$
- $\text{succ} : x \mapsto x + 1$ la fonction successeur (alors $n = 1$);
- $\text{id}_n^i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ les fonctions de projection, pour $1 \leq i \leq n$;

et stable par les opérations de base :

- $\text{Comp}_n(g, h_1, \dots, h_m) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$ la composition
- $\text{Rec}(g, h)$ la fonction définie par récurrence comme

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, m+1) = h(x_1, \dots, x_n, m, f(x_1, \dots, x_n, m)), \end{cases}$$

Ces règles simples permettent de définir des fonctions nouvelles. Par exemple, on peut définir une fonction Pred (prédécesseur) par la règle de récurrence :

$$\text{Pred}(0) = 0, \quad \text{Pred}(x+1) = x,$$

ce qui s'exprime plus formellement par $\text{Pred} = \text{Rec}(0, \text{Proj}_2^2)$. (Noter qu'on emploie ici la *constante* 0 et non la fonction *Zero*).

Fonctions récursives primitives "classiques" Dans la suite, on pourra considérer que les fonctions suivantes sont récursives primitives, sans le redémontrer :

- L'addition, la soustraction tronquée à 0, la multiplication, la puissance, sur \mathbb{N}^2 .
- Les fonctions récursives primitives sont stables par comparaison, $(<, \leq, =)$ (prédicats récursifs primitifs).
- Les fonctions définies par cas (if-then-else) eux mêmes récursifs primitifs, sont récursives primitives.

3.1 Quelques résultats simples

EXERCICE 3.1 ▶ Zero

Montrer que l'on pourrait se restreindre à uniquement la fonction constante 0 d'arité 0 dans la définition des récursives primitives, c'est-à-dire que l'on peut construire $\text{zero}_{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 3.2 ▶ Swap

Montrer que si $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est récursive primitive, alors $\text{Swap}(f) = g$ définie par $g(x, y) = f(y, x)$ est aussi récursive primitive.

EXERCICE 3.3 ▶ Fonctions arithmétiques

Montrer directement à l'aide des définitions uniquement (zéro, id, succ, Comp et Rec), et éventuellement la fonction Swap, que les fonctions suivantes sont récursives primitives :

- $\text{pred}(n)$ qui vaut 0 si $n = 0$ et $n - 1$ sinon.
- $\text{vabs}(n)$ valeur absolue de la différence.

1. Comme Wikipédia, nous utiliserons "récursives primitives" et non "primitives récursives"

– $\text{eq}(m, n)$ qui vaut 1 si $m = n$ et 0 sinon.

À partir de cette étape, on pourra écrire des définitions de fonctions récursives primitives par cas (si les cas sont des tests primitifs récursifs) et en utilisant des récursions qui font strictement décroître un certain paramètre (en montrant que la récursion termine).

EXERCICE 3.4 ▶ Fonctions arithmétiques, un peu plus difficiles

On ne demande pas de montrer que mod et pow sont primitives. Montrer que la fonction $\text{sqr}(m, n)$ racine n -ième de m , est récursive primitive. On commencera par définir la racine carrée comme fonction entière, on généralisera à la racine n -ième, avant toute tentative de résolution de l'exercice.

3.2 Boucles / Test de Primalité

L'exercice suivant montre qu'une certaine forme de "boucle for" est également possible.

EXERCICE 3.5 ▶ For

Si $g(x, y)$ est récursive primitive, alors le sont aussi

$$S_g(z, y) = \sum_{x=0}^z g(x, y), \quad P_g(z, y) = \prod_{x=0}^z g(x, y).$$

EXERCICE 3.6 ▶ Prédicats

Si R est un prédicat récursif primitif, alors le sont aussi

$$\exists x \leq z, R(x, y) \quad \text{et} \quad \forall x \leq z, R(x, y).$$

On construira judicieusement un prédicat g pour la question précédente, à partir de R .

EXERCICE 3.7 ▶ Prime

Montrer que le prédicat "x est un nombre premier" est récursif primitif.

3.3 Exploration bornée

Soit $R(y, x_1, \dots, x_n)$ un prédicat. On définit un opérateur Min de "minimisation bornée" par :

$$\text{Min}_{y=0}^x R(y, x_1, \dots, x_n) : (x, x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} \text{le plus petit } y \leq x \text{ tel que } R(y, x_1, \dots, x_n), \text{ s'il en existe un} \\ x \text{ sinon.} \end{cases}$$

EXERCICE 3.8 ▶ Min Bornée

Montrer que si R est récursive primitive, alors $\text{Min}_{y=0}^x R(y, x_1, \dots, x_n)$ aussi. Cette opération permet de définir des fonctions de manière implicite par exploration bornée. En voici deux exemples.

EXERCICE 3.9 ▶ Nombre premier

En utilisant le résultat précédent, montrer que la fonction $n \mapsto$ n ième nombre premier est récursive primitive.

EXERCICE 3.10 ▶ Cantor

La fonction de Cantor $\langle x, y \rangle : (x, y) \mapsto ((x + y)^2 + 3x + y)/2$ envoie bijectivement \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} . Montrer que $\langle x, y \rangle$ est récursive primitive, ainsi que les deux fonctions K et L telles que $K(\langle x, y \rangle) = x$ et $L(\langle x, y \rangle) = y$.

EXERCICE 3.11 ▶ Fibonacci

En utilisant l'exercice précédent, montrer que la suite de Fibonacci, définie par récurrence, est récursive primitive :

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

3.4 La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive

Pour montrer qu'une fonction n'est pas récursive primitive, il ne suffit pas de disposer d'une définition de cette fonction qui viole une des contraintes.

EXERCICE 3.12 ▶ Minimum

La fonction min peut être définie par

$$\min(0, y) = 0, \quad \min(x + 1, 0) = 0, \quad \min(x + 1, y + 1) = \min(x, y) + 1.$$

qui n'est pas une définition de fonction récursive primitive. Donner une preuve que min est quand même récursive primitive.

La fonction d'Ackermann est un des premiers exemples historiques de fonction “calculable” qui ne soit pas récursive primitive. Les exercices qui suivent prouvent ce résultat.

Définition. Soit A_n la suite de fonctions définie par

$$A_0(m) = m + 1, \quad A_{n+1}(0) = A_n(1), \quad A_{n+1}(m + 1) = A_n(A_{n+1}(m)).$$

La *fonction d'Ackermann* est définie² par $A(n, m) = A_n(m)$.

EXERCICE 3.13 ▶ Suite de fonctions

Montrer que pour n fixé, la fonction A_n est récursive primitive. Comme on l'a vu avec min, il faut une idée supplémentaire pour prouver qu'une fonction n'est pas récursive primitive. La construction d'Ackermann vise à produire une fonction à croissance “trop rapide” pour être récursive primitive. Par exemple, pour les premières valeurs de l'indice, on observe facilement par récurrence que

$$A_1(m) = m + 2, \quad A_2(m) = 2m + 3, \quad A_3(m) = 8 \cdot 2^m - 3, \quad A_4(m) = 2^{2^m} - 3.$$

L'exercice suivant mesure cette croissance ; dans un premier temps, elle peut être sautée et son résultat admis.

EXERCICE 3.14 ▶ Ackermann

Montrer que pour tous n, m , $A_n(m) > m$, que les fonctions A_n sont strictement croissantes, et que pour tous n, m , $A_n(m) \leq A_{n+1}(m)$. Enfin, montrer que $A_k(A_m(n)) \leq A_{2+\max(k,m)}(n)$. Le point clé est le suivant.

EXERCICE 3.15 ▶ Résultat sur les fonctions primrec

Pour toute fonction récursive primitive $f(x_1, \dots, x_k)$, montrer qu'il existe n tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_k), \quad f(x_1, \dots, x_k) \leq A_n(x_1 + \dots + x_k).$$

EXERCICE 3.16 ▶ Conclusion

Conclure que la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.

Conclusion Malgré leur puissance d'expressivité, les fonctions récursives primitives ne capturent pas toute la richesse des fonctions que peut calculer une machine de Turing (fonctions *récuratives*). Il leur manque peu : si on rajoute à leur définition l'opération de *minimisation non-bornée* (correspondant au “while”), définie comme la minimisation bornée en Section 3.3, sauf qu'on ne restreint pas à $y \leq x$, alors on obtient des fonctions partielles (il est possible que la condition ne soit jamais satisfaite) appelées *fonctions récursives partielles* ou fonctions μ -récursives.

3.5 Fonctions μ -récursives, prédictats μ -récursifs

3.5.1 Fonctions numériques

Dans les exercices suivants, on utilisera donc la fonction de minimisation non bornée.

EXERCICE 3.17 ▶ Log

Montrer que la fonction logarithme est μ -récursive.

². Il s'agit de la définition moderne de cette fonction. Ackermann avait défini une variante assez semblable, mais à trois arguments. Sa construction a été simplifiée plus tard.

EXERCICE 3.18 ▶ Quotient, modulo

Utilisez l'opérateur de minimisation pour définir les fonctions :

$$\begin{aligned} - \text{quo}(m, n) &= \begin{cases} \lfloor \frac{m}{n} \rfloor & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} ; \\ - \text{mod}(m, n) &= \begin{cases} m - n \cdot \lfloor \frac{m}{n} \rfloor & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} . \end{aligned}$$

EXERCICE 3.19 ▶ Premiers

On suppose connu le prédictat (supposé μ -récuratif) $\text{prem}(n)$ qui vaut 1 si n est premier, 0 sinon. Montrer que la fonction $\text{nprem}(n)$ qui renvoie le n -ième nombre premier est une fonction μ -récurative.

3.5.2 Prédicats

L'objectif de cette section est de décider des langages avec des prédictats (récuratifs primitifs ou μ -récuratifs). Tout d'abord, nous allons coder les mots dans des entiers, ensuite la notion de reconnaissance sera définie à l'aide d'une fonction qui retourne 1 si le codage du mot en entrée appartient au langage, et 0 sinon.

EXERCICE 3.20 ▶ Codage

Soit un alphabet Σ . Comment coder les mots de Σ^* ? le mot vide ?

EXERCICE 3.21 ▶ Trois langages

Ecrire des prédictats primitifs récuratifs décidant les langages suivants :

- $L_1 = \{w \mid w \text{ contient un nombre impair de } a\}$
- $L_2 = a^*$.
- $L_3 = (a + b)^* ab(a + b)^*$.

3.6 Des machines de Turing pour les fonctions récuratives primitives

L'objectif de cette dernière section est de montrer que les machines de Turing ont une expressivité suffisante pour calculer (toutes) les fonctions récuratives primitives.

EXERCICE 3.22 ▶ Projection

Écrire une machine de Turing Proj_i qui calcule la fonction prenant en entrée un k -uplet d'entiers et renvoyant le i^{e} , avec $1 \leq i \leq k$.

EXERCICE 3.23 ▶ Composition

À partir de k machines G_1, \dots, G_k calculant des fonctions g_1, \dots, g_k de \mathbb{N}^n dans \mathbb{N} et d'une machine F calculant une fonction f de \mathbb{N}^k dans \mathbb{N} , construire une machine calculant l'application :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

EXERCICE 3.24 ▶ Récurativité

À partir d'une machine G calculant une fonction g de \mathbb{N}^{n-1} dans \mathbb{N} et d'une machine H calculant une fonction h de \mathbb{N}^{n+1} dans \mathbb{N} , construire une machine calculant la fonction de \mathbb{N}^n dans \mathbb{N} définie récurativement par

$$\begin{aligned} f(0, x_2, \dots, x_n) &= g(x_2, \dots, x_n), \\ f(x_1 + 1, x_2, \dots, x_n) &= h(f(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

3.7 Minimisation non-bornée

Les machines de Turing ont donc au moins l'expressivité des fonctions récuratives primitives. À la fin de la section précédente, on a mentionné le fait que ce qui manquait aux fonctions récuratives primitives pour avoir toute l'expressivité des machines de Turing était la minimisation non-bornée (correspondant au 'while' des langages de programmation). C'est par contre une opération très facile à implanter sur une machine de Turing.

EXERCICE 3.25 ▶ Codage

À partir d'une machine F calculant une fonction $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$, construire une machine, qui prend en entrée le codage de (x_2, \dots, x_n) et s'arrête avec sur son ruban le codage du plus petit $y \in \mathbb{N}$ tel que $f(y, x_2, \dots, x_n) = 1$ s'il en existe 1, et boucle sinon.

Thème 4

Indécidabilité

Objectifs

- Savoir prouver qu'un problème est indécidable.
- Découvrir de nouveaux modèles de calculs de puissance équivalente aux machines de Turing.

Rappel Pour montrer qu'un problème est indécidable, soit on montre de manière directe (cf. cours), soit on effectue une réduction, dont on rappelle la définition :

DÉFINITION 1. Soient L_1 et L_2 deux langages de Σ^* . Une *réduction* de L_1 à L_2 est une fonction récursive (i.e. calculable par machine de Turing) $\rho : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ telle que :

$$w \in L_1 \text{ ssi } \rho(w) \in L_2.$$

PROPOSITION 1. Pour montrer qu'un langage L n'est pas récursif (i.e est indécidable), il suffit d'exhiber un langage L' non récursif tel que L' se réduit à L .

En général, au lieu d'exhiber une machine de Turing qui réalise la réduction, on se contente de fournir un algorithme dans un langage "raisonnable". Ceci sera justifié par la section 4.3.

4.1 Trois problèmes indécidables

Le Xième problème de Hilbert peut s'énoncer de la façon suivante :

HILBERT X Soit p un polynôme à n variables à coefficients dans \mathbb{Z} , existe-t-il une racine entière, c'est à dire $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^n$ tels que $p(x_1, \dots, x_n) = 0$?

Il a été montré indécidable par Matiiassevitch en 1970.

EXERCICE 4.1 ► Xth Hilbert

Montrer par réduction à partir du Xième problème de Hilbert que le problème de satisfiabilité sur \mathbb{R} des formules construites sur $\{0, 1, +, *, \sin\}$ est indécidable.

On rappelle $LU = \{< M, w > \mid M \text{ accepte } w\}$. Ce problème a été montré indécidable dans le cours.

EXERCICE 4.2 ► Machines de Turing

Soient M_1 et M_2 deux machines de Turing. Montrer que le problème $L(M_1) =? L(M_2)$ est indécidable.

EXERCICE 4.3 ► Miroir

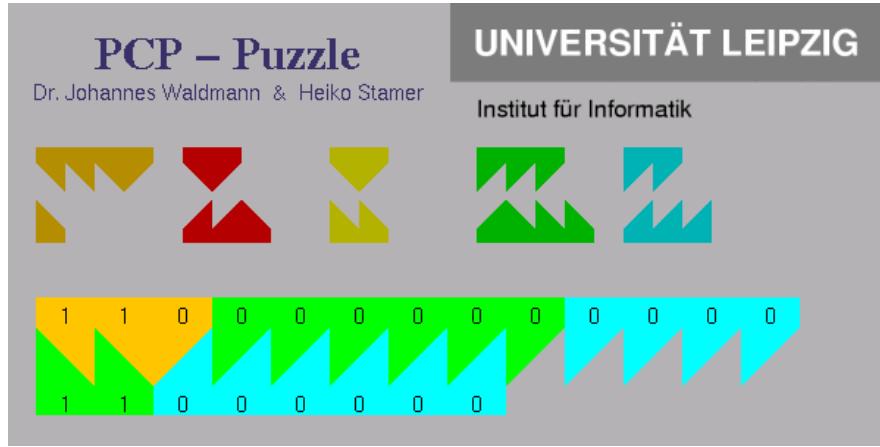
Soit L un langage accepté par une machine de Turing et soit L^R le langage constitué des mots de L vus dans un miroir. Par exemple, si $L = \{a, ab, abb, abbb\}$, alors $L^R = \{a, ba, bba, bbba\}$. Montrer que le problème "est-ce que $L = L^R$?" est indécidable.

4.2 Indécidabilité du Problème de Correspondance de Post (PCP)

Soit Σ un alphabet fini¹, et $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ un ensemble fini de dominos étiquetés par des mots sur l'alphabet Σ (des paires de mots, donc). Le Problème de Correspondance de Post (PCP), introduit par Emil Post en 1946, consiste à déterminer s'il existe une séquence de dominos de P tels que le mot obtenu par la concaténation des premières composantes est identique à celui formé par la concaténation des secondes composantes. Plus formellement, on cherche à déterminer l'existence d'une suite $(u_i, v_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que : $\forall 0 \leq i \leq n, (u_i, v_i) \in P$ et $u_0 \cdot u_1 \cdots u_n = v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$.

EXERCICE 4.4 ► PCP

1. Rédaction par P. Brunet pour l'examen de MIF15 de déc. 2014

FIGURE 4.1 – PCP, version graphique, <http://freecode.com/projects/pcp-puzzle>

1. Résoudre PCP “à la main” pour les instances suivantes. *Si une correspondance existe, on la donnera explicitement. Sinon, on justifiera soigneusement qu'une telle correspondance n'existe pas.*
 - (a) $P_0 = \{(a, aaa), (aaaa, a)\}$;
 - (b) $P_1 = \{(aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)\}$;
 - (c) $P_2 = \{(a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)\}$;
 - (d) $P_3 = \{(ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)\}$.
2. Donner un algorithme pour décider PCP dans le cas où Σ ne contient qu'une seule lettre.

On considère maintenant une variante de PCP, le Problème de Correspondance de Post Modifié (PCPM). Pour ce problème, on considère un ensemble fini de dominos P et un domino initial $(u_0, v_0) \in P$, et on cherche à déterminer l'existence d'une correspondance qui commence par (u_0, v_0) .

On considère comme acquis que PCPM est indécidable : en effet il existe une réduction du problème de l'arrêt d'une machine de Turing vers PCPM. On va maintenant montrer que PCP est indécidable, en réduisant depuis PCPM.

EXERCICE 4.5 ► Réduction

On commence par introduire deux fonctions p et s . Soit $\$$ un nouveau symbole n'appartenant pas à Σ , pour tout mot $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ (les a_i sont les lettres), on définit :

$$\begin{cases} p(w) = \$a_1\$a_2 \cdots \$a_n \\ s(w) = a_1\$a_2\$ \cdots a_n\$ \end{cases}$$

1. Montrer que les fonctions p et s vérifient les propriétés suivantes :

- pour deux mots v et w , $p(vw) = p(v)p(w)$ et $s(vw) = s(v)s(w)$;
- pour tout mot w , $p(w)\$ = \$s(w)$.

Soit $P, (u_0, v_0)$ une instance une PCPM, on définit $P' = \{(p(u_0), \$s(v_0))\} \cup P_1 \cup P_2$ avec :

$$\begin{cases} P_1 = \{(p(u), s(v)) \mid (u, v) \in P\} \\ P_2 = \{(p(u)\$, s(v)) \mid (u, v) \in P\} \end{cases}$$

2. Montrer que $P, (u_0, v_0)$ admet une solution pour PCPM si et seulement si P' admet une solution pour PCP.
3. En déduire que PCP est indécidable.

4.3 Machines alternatives

4.3.1 Machines à piles

Une machine à k piles possède un nombre fini k de piles r_1, \dots, r_k qui correspondent à des piles d'éléments de Σ . Les instructions d'une machine à piles permettent seulement d'empiler un symbole sur l'une des piles, tester la valeur du sommet d'une pile, ou dépiler le symbole au sommet d'une pile. Si l'on préfère, on peut voir une

pile d'éléments de Σ comme un mot w sur l'alphabet Σ . Empiler (*push*) le symbole a correspond à remplacer w par aw . Tester la valeur du sommet d'une pile (*top*) correspond à tester la première lettre du mot w . Dépiler (*pop*) le symbole au sommet de la pile correspond à supprimer la première lettre de w .

EXERCICE 4.6 ▶ Simulation

Montrer que tout machine de Turing peut être simulée par une machine à 2 piles. En déduire un problème indécidable pour les machines à 2 piles.

4.3.2 Machines à compteur

Une machine à n compteurs a plusieurs registres r_1, \dots, r_n , appelés *compteurs*, chacun capable de stocker un nombre naturel. Un programme est une suite d'instructions de la forme :

1. q:x++ ; goto p
2. q:x- ; goto p
3. q:if x=0 then goto p else goto r
4. q:stop

Calculer 0- produit une erreur. Une configuration de la machine à n compteurs est le $n+1$ -uplet (q, x_1, \dots, x_n) qui représente l'étiquette de l'instruction courante et la valeur actuelle des compteurs. Pour l'entrée x , la configuration initiale est $(init, x, 0, \dots, 0)$, où "init" est une instruction particulière, et qu'elle calcule jusqu'à *stop*. Le résultat est le contenu du registre x_1 après l'arrêt.

EXERCICE 4.7 ▶ Calculons

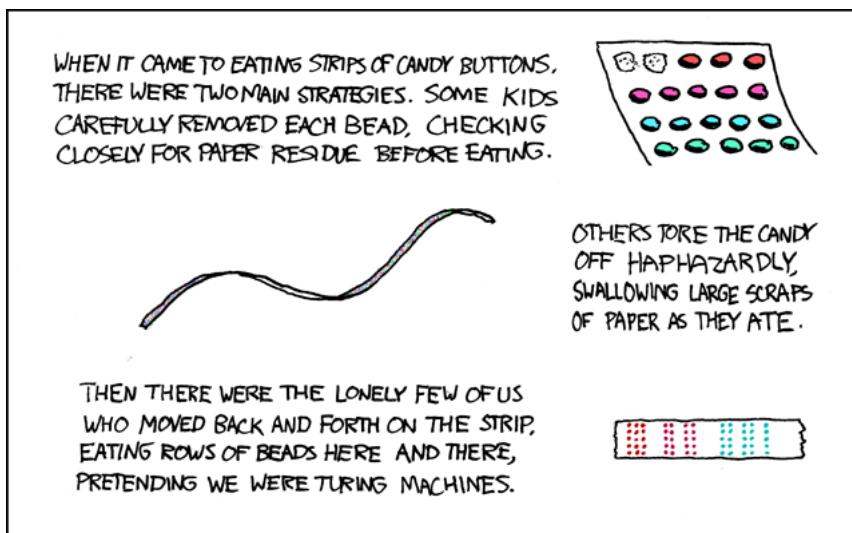
Montrer comment calculer $x \mapsto 2x$, et $x \mapsto x \bmod 2$ avec une telle machine.

EXERCICE 4.8 ▶ Indécidabilité de l'arrêt des machines à compteur

Prouver que le problème de l'arrêt pour les machines à 4 compteurs est indécidable. On utilisera les étapes suivantes :

- Comment représenter un contenu de pile par un entier ?
- Comment réaliser les opérations Empiler et Dépiler ?
- Comment finalement simuler le fonctionnement d'une machine à deux piles par une machine à 3 compteurs ?

Ce résultat est encore valable pour une machine à deux compteurs, via un encodage adhoc. En conséquence, les problèmes d'arrêt, calcul d'invariant, d'accessibilité d'un état mauvais, ... sont indécidables pour les automates à deux compteurs. Ce modèle de calcul plus pratique que les Machines de Turing est beaucoup utilisé en analyse de programme.



<http://xkcd.com/205/>

Thème 5

Langages P, langages NP, NP-complétude

Objectifs

- Connaître la notion de complexité de problème, les classes P et NP.
- Savoir utiliser les réductions polynomiales.

5.1 Retour aux machines de Turing

EXERCICE 5.1 ▶ Shift

Écrire une machine de Turing qui “shifte” son entrée d’une case vers la droite, et évaluer sa complexité. Quelle est la complexité du problème ?

5.2 Quelques problèmes P

Soient les deux problèmes suivants :

- 2-SAT : Soit une forme normale conjonctive F dans laquelle chaque clause a exactement 2 littéraux. F est-elle satisfaisable ?
- 2-COLOR : Soit un graphe $G = (V, E)$. Existe-t-il une fonction $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ telle que pour toute arête (u, v) de G , $c(u) \neq c(v)$?

EXERCICE 5.2 ▶ 2-SAT dans P

Prouver directement que 2-SAT est dans P.

EXERCICE 5.3 ▶ 2-COLOR dans P

Prouver directement que 2-COLOR est dans P.

EXERCICE 5.4 ▶ Complémentation

Montrer que la classe P est close par complémentation.

5.3 Appartenance à P via réduction polynomiale

On rappelle la définition d'une réduction polynomiale :

DÉFINITION 2. Soient L_1 et L_2 deux langages de Σ^* . Une réduction polynomiale de L_1 vers L_2 est une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable en temps polynomial telle que $x \in L_1$ ssi $f(x) \in L_2$. On note alors $L_1 \leq^P L_2$.

Informellement, cela signifie que L_1 n'est pas plus difficile que L_2 .

On a ensuite le résultat suivant

PROPOSITION 2. Si $L_1 \leq^P L_2$ et $L_2 \in P$, alors $L_1 \in P$.

EXERCICE 5.5 ▶ 2-COLOR dans P, par réduction

Démontrer que le langage 2-COLOR se réduit polynomialement à 2-SAT. En déduire qu'il est dans P.

5.4 NP-Complétude

EXERCICE 5.6 ▶ Questions de cours

Soient P_1 et P_2 deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une transformation polynomiale (une réduction) de P_1 en P_2 . Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de deux lignes de justification par question.

1. Si $P_1 \in P$, a-t-on $P_2 \in P$?

2. Si $P_2 \in \mathsf{P}$, a-t-on $P_1 \in \mathsf{P}$?
3. Si P_1 est NP-complet, P_2 est-il NP-complet ?
4. Si P_2 est NP-complet, P_1 est-il NP-complet ?
5. Si on connaît une transformation polynomiale de P_2 en P_1 , P_1 et P_2 sont-ils NP-complets ?
6. Si P_1 et P_2 sont NP-complets, existe-t-il une transformation polynomiale de P_2 en P_1 ?
7. Si $P_1 \in \mathsf{NP}$, P_2 est-il NP-complet ?

5.5 Quelques petites réductions “faciles”

On rappelle la proposition qui permet de prouver qu'un problème donné est NP-complet :

PROPOSITION 3. *Si $L_1 \leq^P L_2$ et L_2 NP-complet, alors L_1 est NP-complet.*

Il s'agit donc de réduire polynomialement le problème en question (supposé dans NP) à un problème connu. Dans la suite, nous allons prouver NP-complets des variantes de “problèmes connus”.

EXERCICE 5.7 ► 3-NAE “not all equal”

- *Instance* : Un ensemble de clauses C_1, \dots, C_m , chacune contenant exactement 3 littéraux.
- *Question* : Existe-t-il une instantiation des variables telle que chaque clause contient un littéral évalué à vrai et un littéral évalué à faux ?

Montrer que 3-NAE est NP-complet. *Indice* : On pourra créer $m+1$ nouvelles variables, et construire une instance avec $2m$ clauses. Pour l'exercice suivant, on rappelle la définition du problème 2-PARTITION, qui est NP-complet (on ne demande pas de preuve).

DÉFINITION 3 (2-PARTITION). *Instance* $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ des entiers

Question : Existe-t-il $I \subset S$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

EXERCICE 5.8 ► Deux variantes de 2-PARTITION

Montrer que les deux variantes suivantes de 2-PARTITION sont NP-complètes.

1. 2-Part-Even :

Instance : Un ensemble V de $2n$ entiers strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_{2n} .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble $I \subset [1..2n]$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

2. 2-Part-EQ :

Instance : Un ensemble V de $2n$ entiers strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_{2n} .

Question : Existe-t-il un sous-ensemble $I \subset [1..2n]$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ et $|I| = n$.

5.6 Deux réductions plus compliquées

Dans les deux cas il s'agit de réduction à partir de 3-SAT.

EXERCICE 5.9 ► SUBSET-SUM

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est NP-complet.

SUBSET-SUM

Instance : un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t .

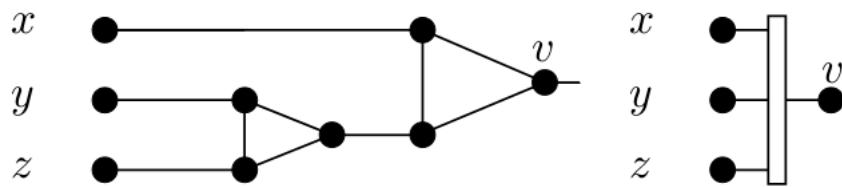
Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Indication : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses C_0, \dots, C_{m-1} sur les variables x_0, \dots, x_{n-1} , considérer S l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où b_{ij} (resp. b'_{ij}) vaut 1 si le littéral x_i (resp. \bar{x}_i) apparaît dans C_j et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2 \cdot 10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif t tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme t si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

EXERCICE 5.10 ► NP-complétude de 3-COLOR

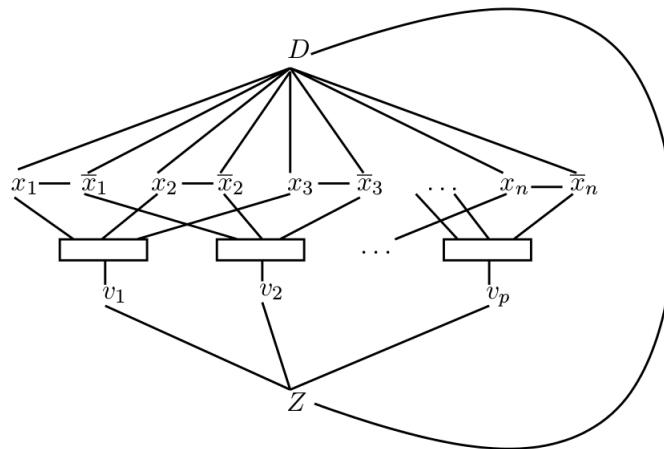
On va faire une réduction à partir de 3-SAT, montré NP-complet dans le cours.

Soit le gadget suivant (à droite son symbole dans la suite) :



1. Montrer que 3-COL est dans la classe NP.
2. Montrer que le gadget satisfait les 2 propriétés suivantes¹ :
 - (a) Si $x = y = z = 0$ alors v est *nécessairement* colorié à 0.
 - (b) Toute autre entrée (x, y, z) permet de colorier v à 1 ou 2 (au sens où l'on est capable d'exhiber un coloriage *tel que...*)

Soit I une instance de 3-SAT avec p clauses C_k (numérotées de 1 à p) et n variables x_i . On construit le graphe G suivant :



3. Vérifier que ce graphe a une taille polynomiale en l'instance I considérée.
4. Prouver que I a une solution ssi G est 3 coloriable.

1. On pourra utiliser la notation suivante : $x, y \in \{0, 1, 2\}$ étant distincts, $\varphi(x, y)$ désigne le troisième élément de $\{0, 1, 2\}$.

Annexe A

Références Bibliographiques

Les ressources offertes sur le web sont très nombreuses, parmi celles-ci voici une sélection triée par thème.

A.1 Machines de Turing

Les exercices de TD des machines de Turing (et des fonctions primitives) ont pour principale inspiration les "petites classes" d'INF412 à Polytechnique :<http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/>

A.2 Indécidabilité

- http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~asarin/calc2k3/calcul_cours.pdf
- <http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/uploads/Main/chap7-good.pdf>
- <http://www-verimag.imag.fr/~perin/enseignement/L3/mcal/cours/MCAL-MT.pdf>

A.3 NP-complétude

Nous nous sommes fortement inspirés du chapitre 9 du poly d'Yves Robert à l'ENSL <http://www.di.ens.fr/~fouque/articles/poly-algo.pdf>, ainsi que du polycopié de TD correspondant.