Les 5 et 12 Juin 2003

Géométrie

Laure Danthony(-Gonnord) - `gonnord@imag.fr`
`http://www-verimag.imag.fr/~gonnord/`

Papier gnagna... `restart;` *gnagna* `with(linalg);` *gnagna sauvegarde.*

On commence par reprendre le dernier exercice du TD précédent...

1 Construction d'une matrice de rotation/réflexion

Si f est la rotation d'axe orienté par v_0 et d'angle θ, et g la réflexion par raport à $v_0^\perp$, on a :

$$f(v) = \frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0 + \cos\theta\Big(v - \frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0\Big) + \frac{\sin\theta}{\|v_0\|}v_0 \wedge v \quad , \quad g(v) = v - 2\frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0.$$

Maple : vector, dotprod, crossprod, evalm, convert, list, genmatrix.

1. Calculer l'image du vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par la rotation d'axe orienté par $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. En utilisant la fonction `genmatrix` (après une petite conversion en liste...), construire la matrice de la rotation précédente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier sa trace...
3. Ecrire une fonction `generateur_rotation` prenant en entrée un vecteur v_0 de $\mathbb{R}^3$ et un angle θ, et retournant la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par v_0, et d'angle θ.
4. Donner la matrice dans la b.c. de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Construire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $v_0^\perp$.
6. Ecrire une fonction `generateur_reflexion` prenant en entrée un vecteur v_0 de $\mathbb{R}^3$, et retournant la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $v_0^\perp$.
7. Donner la matrice dans la b.c. de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\perp$.

► <u>Les Maths derrière :</u> *Groupe orthogonal, réflexions, rotations, produit vectoriel, produit scalaire.*

2 Un problème d'extremum

On cherche les extrema locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2$.

Maple : plot3d, diff, solve.

1. Représenter la surface d'équation $z = f(x, y)$.
2. Déterminer les points critiques de f (points en lesquels le gradient s'annule).
3. Représenter f au voisinage de chacun de ces points ; deviner puis prouver la nature de ces points.

► <u>Les Maths derrière :</u> *Point critique, extremum local, point-selle.*

3 Un exercice de géométrie

On cherche à montrer l'existence d'une droite orthogonale à la fois au cercle $\mathcal{C}$ d'équation implicite $(x-1)^2+(y-5)^2=1$ et à la courbe Γ d'équation $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$ Un vecteur tangent à Γ en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est $\begin{pmatrix}1\\ f'(x_0)\end{pmatrix}$: on peut en déduire simplement une équation de la normale à Γ en ce point. Quant au cercle, les droites qui lui sont normales sont celles qui passent par son centre.

Maple : implicitplot, display, seq, subs, fsolve, implicitplot3d, display3d.

1. Représenter $\mathcal{C}$ et Γ sur un même dessin.
2. Ecrire une fonction `normale` prenant en entrée `x0`, et retournant une équation de la normale à Γ en $\big(x_0, f(x_0)\big)$.
3. A l'aide de `implicitplot`, tracer la normale en -1 et celle en 1... sur un dessin contenant Γ et $\mathcal{C}$.
   On pourra imposer un repère orthonormé à l'aide de l'option `scaling=constrained`*, ou bien avec le clic droit sur le dessin...*
4. A l'aide de `seq`, réaliser un dessin comportant Γ, $\mathcal{C}$, et 10 ou 20 normales à Γ, pour $x_0 \in [0,2]$. Affiner la recherche...
5. Déterminer une équation algébrique portant sur x_0 ; la résoudre... éventuellement numériquement.
6. Montrer que l'ellipsoïde d'équation $2x^2+(y-1)^2+(z-5)^2=1$ et la surface d'équation $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ ont une normale commune...

► Les Maths derrière : *Vecteurs tangents à une courbe, équations normales de droites.*