PCSI 842, 2003 **TP Maple - 1**

Les 10 et 17 avril 2003

Matrices (1)

Laure Danthony (-GONNORD)
`http://www-verimag.imag.fr/~gonnord/`

Avant de commencer le TP, on sortira feuilles de papier de brouillon et crayons. On commencera en tapant la commande magique `restart;` *et en chargeant le package d'algèbre linéaire* `with(linalg);` *puis on sauvera immédiatement sa feuille de travail au bon endroit (sans quoi le responsable des salles info va encore grogner).*

1 Un changement de base

Maple : vector, matrix, transpose, rank, kernel, seq, evalm, subs.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,2)$, $f_3 = (-1,1,1)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) forme une base de E. On note $\mathcal{F}$ cette base.
2. Soit u l'endomorphisme de E définit par : $u(f_1) = 2f_1$, $u(f_2) = f_1 + 2f_2$, $u(f_3) = -f_3$. Donner la matrice T de u dans $\mathcal{F}$ puis calculer la matrice A de u dans la base canonique.
3. Donner une base de $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et de $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id})$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?
4. Visualiser T^n pour n de 2 à 10. En déduire une formule générale que l'on prouvera à la main ou à l'aide de Maple.
5. Calculer A^n à l'aide du changement de base. Vérifier le résultat avec $n = 50$ puis $n = 51$ (substituer 50 puis 51 à n dans votre formule, et comparer au résultat calculé directement).

► Les Maths derrière : *Formules de changement de base, calcul de T^n, où T est triangulaire gentille ; calcul de A^n par changement de base.*

2 Une matrice avec un paramètre

Maple : det, factor, rank, subs, evalm, addcol, addrow.

On rappelle (!) qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

On travaille ici avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 281\,a + 33705 & -20020 + 20\,a & -500 \\ 1789\,a - 1789 & -999\,a + 999 & -25\,a + 25 \\ -633\,a - 67268 & 39960 & 998 + a \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

Après que quelqu'un se soit sacrifié, les autres pourront récupérer cette matrice via le réseau...

1. A est-t-elle inversible ?
2. Quel est le rang de A ?
   Pour construire cette matrice bizarre, l'idée est de partir d'une matrice diagonale dont on contrôle bien le rang, puis de faire des opérations élémentaires dans tous les sens : celles-ci conservent le rang comme chacun sait. Les fonctions de base pour de telles opérations sont : `addcol,addrow`.
3. Construire une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à l'aide d'un paramètre a, vérifiant les propriétés suivantes :
   – B est inversible sauf pour $a = 3$ et $a = -1$.
   – Pour $a = 3$, le rang de B est 2 alors que pour $a = -1$, son rang est 1.
   – B est de la forme $\begin{pmatrix} . & 2a+2 & -2a+6 \\ 8 & . & . \\ a-7 & . & . \end{pmatrix}$.

► Les Maths derrière : *Caractérisation de l'inversibilité par le déterminant ; conservation du rang par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.*

3 Une matrice stochastique

Une matrice est dite stochastique lorsque la somme des éléments de chaque colonne vaut 1 (de telles matrices interviennent de façon naturelle en probabilités). On considère ici la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Maple : matrix, evalm, vector, seq, solve, minpoly, factor, kernel, colspace, assign, limit, map, evalf.

1. Calculer le produit $(1\ \ 1\ \ 1)A$. Expliquer. Vérifier que A^{50} est stochastique.
2. Vérifier que $A - I_3$ est non inversible[1] ; déterminer son image et son noyau.
3. A l'aide de `map` et `evalf`, evaluer A^{100} et A^{200}. Qu'observe-t-on ?
4. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. *Dans la suite, on note* $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
5. Demander à Maple ce que vaut `minpoly(A,X)`...
6. A l'aide des racines de P, calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P.
7. Exprimer A^n à l'aide de A^2, A, I_3 et n.
8. Montrer que A^n tend[2] vers une matrice B que l'on déterminera.
9. Montrer que B est un projecteur qui commute avec A. Donner les directions propres de B, c'est-à-dire son noyau et son image. Quel rapport avec A ?

► Les Maths derrière : *Si A est stochastique, alors A^n aussi ; calcul de A^n par division euclidienne ; si $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$, alors $AB = BA = B^2 = B$, avec* $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker}(A - I_3)$ *et* $\ker B = \operatorname{Im}(A - I_3)$.

[1] en y réfléchissant bien, c'est une conséquence de l'observation de la question précédente...
[2] en tout sens raisonnable