

Optimisation LIF062

Partie Optimisation, sous-partie Optimisation Combinatoire

Laure Gonnord

<http://laure.gonnord.org/pro/teaching/LIF062Optim/>

UCBL/LIP
Villeurbanne/Lyon, France



1 Intro, Optimisation, Problème Linéaire

- Optimiser ?
- Problème Linéaire
- Un peu de maths préliminaires
- La géométrie des PL

2 Résolution d'un PL avec le simplexe

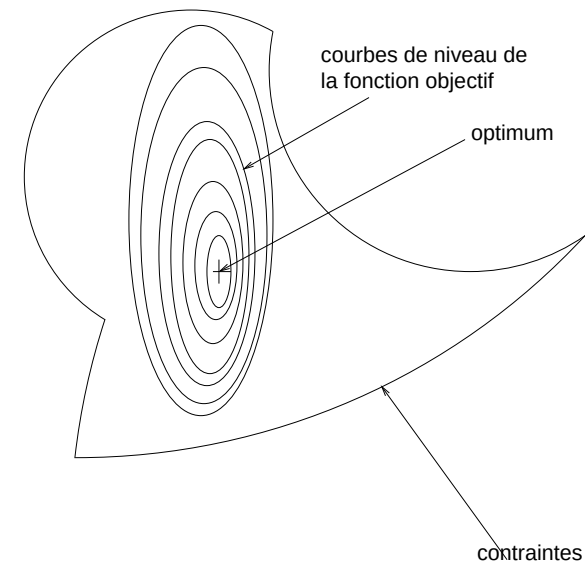
Optimiser c'est quoi ?

1 Intro, Optimisation, Problème Linéaire

- Optimiser ?
- Problème Linéaire
- Un peu de maths préliminaires
- La géométrie des PL

2 Résolution d'un PL avec le simplexe

- Exemple introductif
- Formalisation
- Exercice, démo



Optimisation sous contraintes

- Résoudre :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x), \\ g_i(x) & \leq 0, i = 1, \dots, n \\ x & \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

- L'ensemble des points **faisables** est $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n\}$. Les fonctions g sont les contraintes.
- La **programmation linéaire** est le cas particulier où f et les g_i sont linéaires

1 Intro, Optimisation, Problème Linéaire

- Optimiser ?
- Problème Linéaire
- Un peu de maths préliminaires
- La géométrie des PL

2 Résolution d'un PL avec le simplexe

- Exemple introductif
- Formalisation
- Exercice, démo

Exemple du régime

source : LP, Chvatal.

Food	Serving size	Energy (kcal)	Protein (g)	Calcium (mg)	Price(cents)
Oat Meal	28g	110	4	2	3
Chicken	100g	205	32	12	24
Eggs	2large	160	13	54	13
Whole Milk	237cc	160	8	285	9
Cherry Pie	170g	420	4	22	20
Pork+beans	260g	260	14	80	19

Avec :

Oatmeal : at most 4 servings
 Chicken : at most 3 servings
 Eggs : at most 2 servings
 Milk : at most 8 servings
 Cherry Pie : at most 2 servings
 Pork+beans : at most 2 servings

► Now what ?

Problème Linéaire

Minimiser $3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$
 avec les contraintes :

$$0 \leq x_4 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3, \dots$$

et

$$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000, \dots$$

► Comment on résout ? 8 parts de lait et 2 de cherry pie vont, mais y-a-t-il mieux ?

Problème Linéaire, forme standard

Forme standard d'un PL

Maximiser la **fonction objectif**

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i (i = 1, 2, \dots, m)$$

et

$$x_j \geq 0$$

Définitions

Solution réalisable (**feasible**)

C'est un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ qui satisfait les contraintes.

Solution optimale

C'est une fonction réalisable qui maximise la fonction objectif.

► Comment trouver ces solutions ?

Solutions d'un PL

Un problème peut :

- Avoir une ou plusieurs solutions optimales.
 - Irréalisable (**unfeasible**) si il n'existe pas de solution réalisable.
 - Non borné (**unbounded**) si aucune des solutions réalisables ne sont optimales.
- Et c'est tout (mais ça reste à montrer).

1 Intro, Optimisation, Problème Linéaire

- Optimiser ?
- Problème Linéaire
- Un peu de maths préliminaires
- La géométrie des PL

2 Résolution d'un PL avec le simplexe

- Exemple introductif
- Formalisation
- Exercice, démo

Optimum local, global

Minimum local

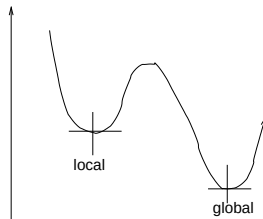
a est un minimum local de f s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

Minimum global

a est un minimum global de f dans D ssi :

$$x \in D \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$



Fonctions affines, fonctions convexes

Fonction convexe

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Fonction affine

Une fonction affine est de la forme :

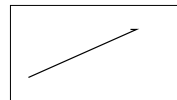
$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

- Dessins !
- Une fonction affine est convexe (et concave !).

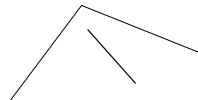
Intérêt de la convexité

Théorème

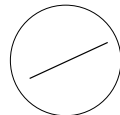
Si f est convexe dans un ensemble convexe S , alors tout minimum local de f est un minimum global.



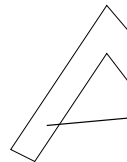
convexe



convexe



convexe



non

- On est dans ce cas pour les PLs ?

Algèbre linéaire

Prérequis :

- Vecteur, matrice, inverse.
- Espace et sous-espace vectoriels.
- Algorithme de Gauss.

- Une fonction affine s'écrit matriciellement comment ?
- Que résout l'algorithme de Gauss ?

Algorithme de Gauss

Réolvons le système :

$$2x + 2y - 3z = -2$$

$$-2x - y - 3z = -5$$

$$6x + 4y + 4z = 16$$

- Comment conclure ? Comment décrire les éventuelles solutions ?
- Et si cela se passe mal ?
- Quelle est la complexité ?

1 Intro, Optimisation, Problème Linéaire

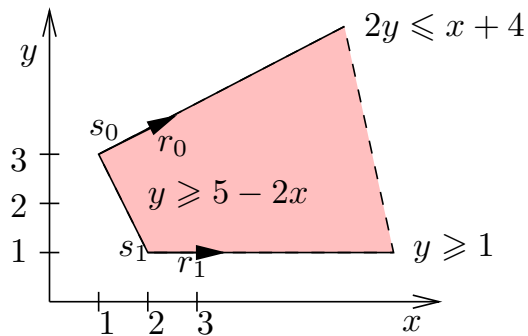
- Optimiser ?
- Problème Linéaire
- Un peu de maths préliminaires
- La géométrie des PL

2 Résolution d'un PL avec le simplexe

- Exemple introductif
- Formalisation
- Exercice, démo

L'interprétation polyédrique d'un PL

- Les contraintes forment un polyèdre convexe :



- La fonction $c.x$ est convexe.
- Si minimum local, il est global.

Les optima sont les sommets

Théorème

Soit P un polyèdre non vide alors :

x est un sommet $\Leftrightarrow x$ est une solution basique réalisable

- Utiliser l'optimalité des sommets : l'algorithme du Simplexe.

Résolution des systèmes linéaires

1 Description de l'ensemble des solutions

Tout d'abord, résoudre un système linéaire, ce n'est pas "trouver la solution" comme dans les petites classes : il existe des problèmes sans solution d'autres avec plusieurs solutions (trouver une paire de chaussettes dans son armoire le matin), voire une infinité de solution (trouver un entier qui soit un multiple de 2), ou encore un problème pour lequel tout le monde est solution (trouver un réel dont le carré est > -3). Il arrive parfois qu'un problème admette une unique solution, mais il faut bien comprendre que ce n'est pas la règle.

En maths, on a l'habitude de décrire les ensembles principalement de deux façons "duales" : on peut décrire un ensemble comme "l'ensemble des machins qui vérifient telle propriété", ou encore comme "l'ensemble des trucs qui ont telle forme".

EXEMPLE 1 *Le segment $[-1, 1]$ est naturellement défini comme l'ensemble des réels x qui vérifient $-1 \leq x \leq 1$. Cela dit, si on considère l'ensemble des réels de la forme $\cos \theta$, pour θ décrivant $\mathbb{R}$, on retrouve le même ensemble. Vous sauriez le prouver ?*

Résoudre un système consiste en général à partir d'une question de la forme "*Quels sont les triplets de réels (x, y, z) qui vérifient en même temps les trois équations ...*" et arriver à une réponse de la forme :

- Ben y'en a pas.
- Il n'y a que le triplet $(2, -15, 1024)$.
- Ce sont tous les triplets de la forme $(3 - \lambda, 2 + \lambda, 3\lambda)$, pour λ décrivant $\mathbb{R}$.

Notons que dans le troisième cas, on peut arriver à plusieurs descriptions différentes du même ensemble :

EXERCICE 1 *Montrer :*

$$\begin{aligned} \{(3 - \lambda, 2 + \lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} &= \{(3 - \mu, 2 + \mu, 3\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, 5 - \alpha, 9 - 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(5 - \beta, \beta, 3\beta - 6) \mid \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Des équations bizarres Comme chacun sait, les notions de TOUJOURS et JAMAIS sont vraiment à distinguer : à la question "a-t-on $x+2 = x+2$?" on répondra "toujours" et à la question "a-t-on $x+2 = x+512$?" on répondra "jamais". Ainsi, un système dans lequel apparaissent les équations $L_1, L_2, \dots, L_n$ et l'équation $0 = 0$ est absolument équivalent au système constitué des équations $L_1, L_2, \dots, L_n$. Par contre, un système constitué des équations $L_1, L_2, \dots, L_n$ et de l'équation $19 = 0$ n'admettra AUCUNE solution. Ainsi, les équations de la forme $\alpha = \beta$ où les inconnues n'interviennent pas sont à prendre avec des pincettes : il faut systématiquement réfléchir (disons les 10 premières fois) avant de les éliminer...

Existence d'une unique solution Lors d'une résolution de système, l'équivalence suivante

(ou *double-implication*) $\mathcal{S} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$ induit la conclusion : "Le système $\mathcal{S}$ admet une unique

solution". Mais sauriez-vous préciser quelle implication fournit l'existence d'une solution, et laquelle fournit l'unicité ?

REMARQUE 1 Prenez votre temps pour répondre à la question précédente : l'expérience montre qu'une réponse trop rapide est correcte statistiquement 35% du temps. Si je pose la même question à mon chat¹, il obtient un meilleur taux de réussite (50%)...

Systèmes équivalents On va écrire ici un certain nombre d'implications du type $\mathcal{S}_1 \implies \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des systèmes d'équations (parfois réduits à une seule équation). On demande de réfléchir à la validité des implications inverses $\mathcal{S}_2 \implies \mathcal{S}_1$. Parfois, on utilisera la notation L_1 (L pour ligne) pour désigner une équation. Si L_1 et L_2 sont deux équations $g_1 = d_1$ et $g_2 = d_2$, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ désigne naturellement l'équation $\alpha g_1 + \beta g_2 = \alpha d_1 + \beta d_2$. Il est bien clair (?) que si L_1 et L_2 sont deux équations qui sont vérifiées, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ l'est également.

Attention, il ne s'agit pas de trouver toutes les bonnes réponses très vite : l'objectif est de réfléchir CALMEMENT et LENTEMENT dans chacun des cas...

- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies 2x + y = 11$
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \alpha L_1 + \beta L_2$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + 17L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + \alpha L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + \beta L_1 \end{cases}$

2 Le principe du pivot

2.1 Systèmes triangulaires

La résolution d'un système triangulaire à *coefficients diagonaux non nuls* se fait sans problème par substitutions successives du bas vers le haut : on garde bien l'équivalence d'après le paragraphe précédent.

¹un animal remarquable

EXEMPLE 2

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ y - 6z &= -3 \\ z &= 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ y &= 6z - 3 = 21 \\ z &= 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(-2y + 3z + 2) = -14 \\ y &= 21 \\ z &= 4 \end{cases} \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est réduit à un singleton : $\mathcal{S} = \{(-14, 21, 4)\}$.

Si le système triangulaire possède des coefficients diagonaux nuls, deux situations peuvent se produire : on peut arriver à l'incompatibilité de deux équations, ou encore à la disparition d'une équation :

EXEMPLE 3

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ -6z &= -3 \\ z &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ z &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ z &= 4 \end{cases}$$

et ici ce système n'admet pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

EXEMPLE 4

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ 6z &= 24 \\ z &= 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z &= 2 \\ z &= \frac{24}{6} = 4 \\ z &= 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(-2y + 3z + 2) = 7 - y \\ z &= 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce dernier système, on voit que pour chaque valeur de y , on peut trouver une (unique) solution de la forme (x, y, z) . On a donc “un degré de liberté”, et on peut décrire $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des triplets de la forme $(7 - y, y, 4)$, pour y décrivant $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \{(7 - y, y, 4) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Attention, lorsqu'on a un système paramétré, on peut être amené à discuter selon la valeur des paramètres, comme on le verra dans les exemples. On peut déjà donner un exemple simplissime :

EXEMPLE 5 On fixe un réel λ . Résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ x &= 2 \\ y &= \lambda \end{cases}$$

2.2 Mise sous forme triangulaire

Décrivons ce qu'on fait pour un système $(3, 3)$ d'inconnues (x, y, z) “lorsque tout se passe bien”, en notant L_1 , L_2 et L_3 les 3 équations en jeu.

On suppose que le coefficient en x de la première équation, disons a , est non nul. On va s'en servir

comme *pivot* pour éliminer les autres occurrences de x . Si on note b et c les coefficients en x des deuxième et troisième lignes, le système constitué des équations $L_1, L_2 - \frac{b}{a}L_1$, et $L_3 - \frac{c}{a}L_1$ est alors équivalent au premier (pourquoi ?) et ne fait apparaître x que dans la première équation : en supposant que le coefficient en y de la nouvelle deuxième ligne L'_2 , disons d , est non nul (c'est alors le nouveau pivot) et en notant e celui de y dans la troisième nouvelle ligne L'_3 , le système constitué des lignes L_1, L'_2 et $L'_3 - \frac{e}{d}L'_2$ est équivalent au premier système et triangulaire : on est ramené à un cas qu'on sait traiter.

Lors de la première étape, on ne touche pas à la première ligne. De même, à la deuxième étape, on ne touche ni à la première ni à la deuxième ligne, etc...

EXEMPLE 6 Dans l'exemple qui suit, on adopte une notation classique : pour dire qu'on change la seconde ligne L_2 en $L'_2 = L_2 + \alpha L_1$, on préférera noter $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, ce qui signifie : à partir de maintenant, ce qu'on appelle L_2 , c'est ce qui désignait avant $L_2 + \alpha L_1$. Après cinq opérations de ce type, on parlera donc toujours de L_8 plutôt que de L_8'''' :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & = & 16 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 6z & = & -3 \\ & - & 2y & + & 13z & = & 10 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 6z & = & -3 \\ & & & & z & = & 4 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \end{array} \\ &\iff \dots \end{aligned}$$

Décrivons maintenant les différents problèmes qui peuvent arriver en cours de résolution d'un système (3,3), ainsi que leur solution :

- **Pas de pivot où on veut** : si à la première étape le coefficient en x de la première ligne est nul, on peut échanger la première équation avec la deuxième ou la troisième. De même, si à la seconde étape, le coefficient en y (futur pivot) est nul, on peut échanger la deuxième équation avec la troisième, MAIS PAS LA PREMIERE (se souvenir qu'on veut arriver à un système triangulaire : il ne faut pas faire réapparaître x !).
- **Plus de pivot !** : si il n'y a pas de coefficient en x non nul (rare : x n'apparaît pas dans le système...) on peut prendre y ou z comme première variable. De même, si après la première étape, y n'apparaît ni dans la deuxième ni dans la troisième équation, on peut prendre z comme deuxième inconnue.
- **Un membre de gauche est nul** : voir plus haut : selon que le membre de droite correspondant est nul ou pas, l'équation va disparaître, ou bien rendre le système incompatible.

2.3 Résolution générale

En regardant un système linéaire à disons n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$, il est difficile de dire a priori si "ça va bien se passer" au sens où il existera une unique solution. A vrai dire, il est plus simple de détecter certaines situations où on est certain que ça va mal se passer : plus d'inconnues que d'équations ou le contraire, deux équations proportionnelles, etc... Le cours d'algèbre linéaire éclaircira complètement cette question plus tard dans l'année, en faisant intervenir un certain *déterminant* dont certains ont peut-être entendu parler en terminale pour les systèmes (2,2). Jusqu'à nouvel ordre, il est cependant INTERDIT d'utiliser ces mystérieux déterminants et les formules tout aussi mystérieuses qui vont avec pour résoudre un système (2,2).

On se lance donc dans une résolution de système sans savoir a priori si on va arriver à un brave singleton comme solution : on essaie de mettre sous forme triangulaire, et en cas

de succès, il n'y a plus qu'à remonter le système comme vu plus haut. On peut décrire ce procédé de façon "algorithmique" (terme qui, c'est décidé, ne prendra JAMAIS de "y" en cours d'année...) : il s'agit ici d'un système à n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$. La première équation s'écrit $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1$, et la dernière $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = y_n$. En cours d'exécution de l'algorithme, L_i désigne toujours la i -ème équation (ou ligne...). Lorsqu'une équation est modifiée, les coefficients $a_{i,j}$ également.

Pour i allant de 1 jusqu'à $n-1$:

- si tous les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont nuls pour $\alpha \geq i$, le système est sous la forme recherchée : on quitte la boucle ;
- sinon, quitte à échanger eux lignes et/ou deux variables, on peut supposer que $a_{i,i} \neq 0$ (c'est le pivot), et alors pour tout $k \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, on remplace L_k par $L_k - \frac{a_{k,i}}{a_{i,i}}L_i$.

(On pourrait traduire quasiment littéralement cet algorithme en de nombreux langages de programmation pour obtenir un programme qui résout effectivement les systèmes linéaires. La difficulté principale est de choisir la structure de donnée adéquate)

Si on est confronté à un des problèmes vu plus haut (pas de pivot, disparition d'équation...), les remèdes qu'on a donné nous assurent qu'on peut arriver (quitte à réordonner les inconnues) à un système **équivalent au système initial** de la forme :

$$(T) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x_1 & + & * & \cdots & \cdots & * & + & \cdots & * = b_1 \\ & & \alpha_2 x_2 & + & \cdots & * & + & \cdots & * = b_2 \\ & & & & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ & & & & & \alpha_r x_r & + & \cdots & * = b_r \\ & & & & & & & & 0 = b_{r+1} \\ & & & & & & & & \cdots \\ & & & & & & & & 0 = b_n \end{array} \right.$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tous non nuls². Maintenant :

- s'il existe un $k > r$ telque $b_k \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution.
- sinon ($b_{r+1} = \dots = b_n = 0$), pour chaque valeurs de $x_{r+1}, \dots, x_p$, on trouve une unique solution au système en résolvant un système triangulaire (on passe $x_{r+1}, \dots, x_n$ dans le membre droit). On obtient donc un ensemble de solution avec $n - r$ paramètres.

3 Quelques exemples supplémentaires

1. *Tout se passe bien*

$$\begin{aligned} & - \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 9 \end{cases} \\ & - \begin{cases} x + y + z = -4 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -3x + y - z = -2 \end{cases} \\ & - \begin{cases} x - y + z - t = -2 \\ 2x - 3y + z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x - y + 3z + 2t = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

2. *Ça se complique*

²Au fait, sauriez-vous distinguer le concept de "tous non nuls" et celui de "non tous nuls" ?

$$\begin{aligned}
& - \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 17 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 6z = 8 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -x + y + 2z + t = 2 \\ 2x + y + 3z - t = -1 \\ y + 4z - t = -3 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -x + y + 2z + t = 2 \\ 2x + y + 3z - t = -1 \\ y + 4z - t = 4 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y - z - t = 2 \\ 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x + 5y + 3z + 3t = 6 \\ 4x + 5y - z - t = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

3. *Il faut discuter* : dans les trois premiers exemples, α est un paramètre réel.

$$\begin{aligned}
& - \begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 4 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 6 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \\
& - \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y - z = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

- On considère l'application :

$$\begin{aligned}
& \Phi \parallel \begin{matrix} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + 2y - z + t, x + y + z - 3t, x + 3y - 3z + 5t) \end{matrix}
\end{aligned}$$

Déterminer les $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\Phi(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$.

4. *Juste pour rire* (extrait de “*Matrices, géométrie, algèbre linéaire*” de P. Gabriel, Ed. Cassini)

- 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves et 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie ;
- 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves et 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie ;
- 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves et 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie ;
- 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves et 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie ;
- 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves et 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie.

Combien coûte un boisseau de chaque denrée ? (*Concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an, époque Han, 123 avant notre ère !*)

LIF062- Optim Partie A
TD1a - Bases Mathématiques, programmes linéaires

1 Bases Mathématiques

EXERCICE 1 *Résoudre les systèmes :*

- $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = -4 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -3x + y - z = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 6z = 8 \end{cases}$

EXERCICE 2 *Résoudre les systèmes (α paramètre) :*

- $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$

2 Programmes Linéaires

(Linear Programming, Chvatal)

EXERCICE 3

1.1 Which of the problems below are in the standard form?

- a. Maximize $3x_1 - 5x_2$
subject to $4x_1 + 5x_2 \geq 3$
 $6x_1 - 6x_2 = 7$
 $x_1 + 8x_2 \leq 20$
 $x_1, x_2 \geq 0.$
- b. Minimize $3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5$
subject to $9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5$
 $8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 \leq 2$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$
- c. Maximize $8x_1 - 4x_2$
subject to $3x_1 + x_2 \leq 7$
 $9x_1 + 5x_2 \leq -2$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

1.2 State in the standard form:

- minimize $-8x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5$
subject to $6x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 2x_4 - 8x_5 \geq 3$
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

EXERCICE 4

Find necessary and sufficient conditions for the numbers s and t to make the LP problem

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} && sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- have an optimal solution,
- be infeasible,
- be unbounded.

EXERCICE 5

(source http://www.nawouak.net/?doc=course.operations_research+ch=simplex+lang=fr)

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y . Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A , B et C . Pour fabriquer un produit X , on a besoin de 2 produits A , de 2 produits B et de 1 produit C . De même, pour fabriquer un produit Y , on a besoin de 3 produits A , de 1 produit B et de 3 produits C . En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A , B et C . Elle a 180 produits A , 120 produits B et 150 produits C . Sachant que le prix de revient de X est 3 francs et que celui de Y est de 4 francs, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire

(Linear optimization, Bertsimas & Tsitsiklis)

EXERCICE 6 Dans une ville il y a I quartiers, J écoles, et G niveaux par école. Une école j donnée possède C_{jh} places pour le g ème niveau. Le nombre d'élèves du quartier i pour le niveau g est S_{ig} . Enfin, les distances quartier-école sont notées $d_{i,j}$. Comment peut-on encoder le problème de minimisation du trajet total parcouru le matin par tous les étudiants en un programme linéaire ?

EXERCICE 7

Exercise 1.14 A company produces and sells two different products. The demand for each product is unlimited, but the company is constrained by cash availability and machine capacity.

Each unit of the first and second product requires 3 and 4 machine hours, respectively. There are 20,000 machine hours available in the current production period. The production costs are \$3 and \$2 per unit of the first and second product, respectively. The selling prices of the first and second product are \$6 and \$5.40 per unit, respectively. The available cash is \$4,000; furthermore, 45%

of the sales revenues from the first product and 30% of the sales revenues from the second product will be made available to finance operations during the current period.

- Formulate a linear programming problem that aims at maximizing net income subject to the cash availability and machine capacity limitations.
- Solve the problem graphically to obtain an optimal solution.
- Suppose that the company could increase its available machine hours by 2,000, after spending \$400 for certain repairs. Should the investment be made?

Enseignants LIF062

- Saida BOUAKAZ (LIRIS) : partie algo numériques
- Laure GONNORD (LIP) et Gregory THIBAUT (LIESP) : optimisation convexe, algos génétiques

La page du cours partie optim : <http://laure.gonnord.org/pro/teaching/LIF062optim/index.html>

Infos grève

<http://douaalter.lautre.net/mobilisation/index.html>

Mardi 17 : Information Grand public, Jeudi 19 Manif Terreaux.

L'assemblée générale de Lyon 1 constate que la communauté universitaire (enseignement supérieur et recherche) n'est toujours pas entendue par le gouvernement. [...] L'assemblée appelle également toutes les composantes, services et étudiants à se réunir au plus vite pour décider collectivement de rejoindre le mouvement de grève.

Concrètement cela signifie que je ne fais pas cours, mais par contre chaque semaine on fait un point avec les étudiants sur du boulot perso et la suite du mouvement.

Les revendications adoptées aux AG précédentes : Concernant la masterisation de la formation des enseignants, nous exigeons le maintien d'une véritable formation professionnelle en alternance, rémunérée, dans le cadre des IUFM. Nous exigeons le maintien du statut national des fonctionnaires et une augmentation du nombre de postes aux concours en cohérence avec les besoins. Nous exigeons le retrait du plan de « mastérisation ».

Le plan de masterisation concerne les étudiants qui veulent passer le concours de professeur des écoles et le capes/agreg. Jusqu'à aujourd'hui, le diplôme mini exigée avant de passer le concours (prof des écoles ou capes) était L3 (ex license, bac+3). Après le concours, les étudiants passaient une année rémunérée à mi temps entre stages et cours à l'IUFM. Le projet prévoit que le concours se passe après deux ans de Master sciences de l'éducation, évidemment non rémunéré, et qu'ensuite les nouveaux enseignants soient lâchés tels quels dans la nature. Mon avis est que le contenu des enseignements en IUFM devaient être revus, améliorés, mais certainement pas abandonnés. Nous affirmons notre implication dans le mouvement de lutte dans les IUT contre les effets de la loi LRU. Nous exigeons le maintien du caractère national des diplômes, des programmes et du fléchage des moyens.

La LRU contient entre autres l'intégration des IUT dans les budgets des universités. Concrètement, étant donné qu'un étudiant en IUT coûte plus d'un étudiant à la fac, cela signifie que l'on va diminuer le contenu des enseignements à l'IUT pour des questions de rendement. La loi contient aussi la suppression du caractère national des diplômes et du fléchage des moyens. Cela signifie que l'on donnera plus aux filières qui rapportent. Le principal dégât collatéral ce sont les moyens accordés aux sciences humaines et sociales, aux sciences pures qui ne pourront pas récolter des fonds privés de sociétés qui ont intérêt à investir les programmes (boîtes infos par exemple).

Nous nous opposons au projet de décret sur le statut des enseignants-chercheurs qui applique et aggrave les dispositions de la loi LRU à travers l'individualisation et la gestion locale des carrières et la modulation des services. Nous exigeons le retrait de ce projet.

Le décret permet aux décideurs de l'université (président, administratifs) de décider une augmentation du nombre d'heures dues pour certains enseignants qui font moins de recherche, ou une diminution pour d'autres. C'est une bonne idée dans l'idéal parce que cela peut décharger des gens qui veulent faire plus de recherche, et parce qu'on n'est pas performant de la même façon au cours d'une carrière. Par contre, donner ce pouvoir à des personnes non scientifiques c'est favoriser le fayotage, c'est permettre qu'on choisisse l'orientation de la recherche vers ce qui rapporte, et cela signifie la fin de la recherche fondamentale.

Nous dénonçons les mensonges du gouvernement à propos du budget, globalement en baisse, de la recherche et des universités. Nous exigeons le maintien des 900 emplois dont la disparition est annoncée. [...] La suite sur laure.gonnord.org/pro