

LIF062- Optim Partie A
TD1a - Bases Mathématiques, programmes linéaires

1 Bases Mathématiques

EXERCICE 1 *Résoudre les systèmes :*

- $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = -4 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -3x + y - z = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 6z = 8 \end{cases}$

EXERCICE 2 *Résoudre les systèmes (α paramètre) :*

- $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$

2 Programmes Linéaires

(Linear Programming, Chvatal)

EXERCICE 3

1.1 Which of the problems below are in the standard form?

- a. Maximize $3x_1 - 5x_2$
subject to $4x_1 + 5x_2 \geq 3$
 $6x_1 - 6x_2 = 7$
 $x_1 + 8x_2 \leq 20$
 $x_1, x_2 \geq 0.$
- b. Minimize $3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5$
subject to $9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5$
 $8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 \leq 2$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$
- c. Maximize $8x_1 - 4x_2$
subject to $3x_1 + x_2 \leq 7$
 $9x_1 + 5x_2 \leq -2$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

1.2 State in the standard form:

- minimize $-8x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5$
subject to $6x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 2x_4 - 8x_5 \geq 3$
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

EXERCICE 4

Find necessary and sufficient conditions for the numbers s and t to make the LP problem

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} && sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- have an optimal solution,
- be infeasible,
- be unbounded.

EXERCICE 5

(source http://www.nawouak.net/?doc=course.operations_research+ch=simplex+lang=fr)

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y . Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A , B et C . Pour fabriquer un produit X , on a besoin de 2 produits A , de 2 produits B et de 1 produit C . De même, pour fabriquer un produit Y , on a besoin de 3 produits A , de 1 produit B et de 3 produits C . En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A , B et C . Elle a 180 produits A , 120 produits B et 150 produits C . Sachant que le prix de revient de X est 3 francs et que celui de Y est de 4 francs, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire

(Linear optimization, Bertsimas & Tsitsiklis)

EXERCICE 6 Dans une ville il y a I quartiers, J écoles, et G niveaux par école. Une école j donnée possède C_{jh} places pour le g ème niveau. Le nombre d'élèves du quartier i pour le niveau g est S_{ig} . Enfin, les distances quartier-école sont notées $d_{i,j}$. Comment peut-on encoder le problème de minimisation du trajet total parcouru le matin par tous les étudiants en un programme linéaire ?

EXERCICE 7

Exercise 1.14 A company produces and sells two different products. The demand for each product is unlimited, but the company is constrained by cash availability and machine capacity.

Each unit of the first and second product requires 3 and 4 machine hours, respectively. There are 20,000 machine hours available in the current production period. The production costs are \$3 and \$2 per unit of the first and second product, respectively. The selling prices of the first and second product are \$6 and \$5.40 per unit, respectively. The available cash is \$4,000; furthermore, 45%

of the sales revenues from the first product and 30% of the sales revenues from the second product will be made available to finance operations during the current period.

- Formulate a linear programming problem that aims at maximizing net income subject to the cash availability and machine capacity limitations.
- Solve the problem graphically to obtain an optimal solution.
- Suppose that the company could increase its available machine hours by 2,000, after spending \$400 for certain repairs. Should the investment be made?