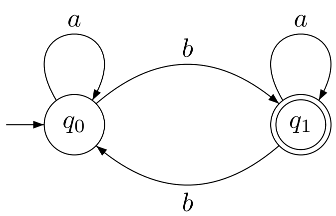
Éléments de correction du DM de MCAL, MIAGE

Christian Ene et Laure Gonnord

6 mars 2006

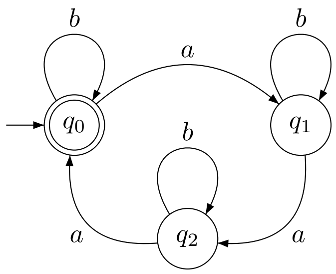
Exercice 1

1. Nombre impair de b : Soit $\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, q_0, \delta, \{q_1\})$, avec δ fonction de transitions donnée par le dessin ci-dessous.



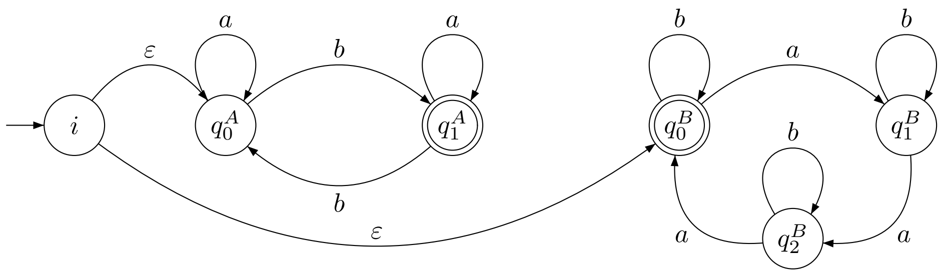
(cet automate est déterministe) Alors $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$. En effet, si u est un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contient un nombre impair de b, alors on montre par récurrence sur n (la taille de u) que, en lisant u depuis q_0, si on est dans q_0 c'est que l'on a lu un nombre pair de b jusqu'à présent, et si on est dans q_1 c'est que l'on a lu un nombre impair de b. Donc, le mot u est accepté par $\mathcal{A}$. Réciproquement, si u est accepté par $\mathcal{A}_1$, comme q_1 est l'unique état final, alors forcément u contient un nombre impair de b (en fait, il contient $2k + 1$ fois la lettre b, où k est le nombre de "cycles" $q_0 - q_1 - q_0$).

2. $\mathcal{A}_2$:

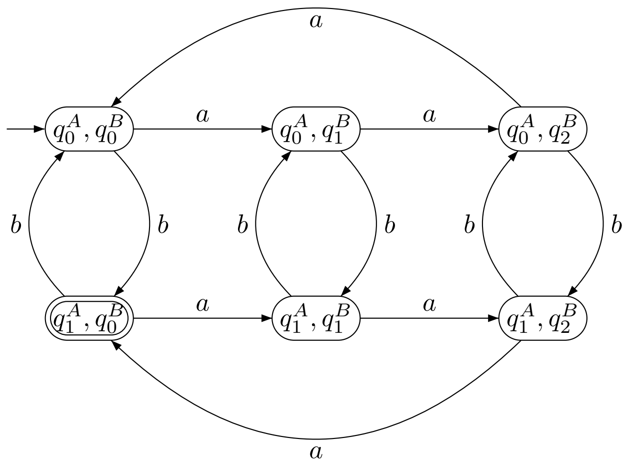


On montre que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = L_2$, en montrant par exemple que si on est dans l'état q_i, alors le nombre de a lus jusqu'à présent est égal à i modulo 3.

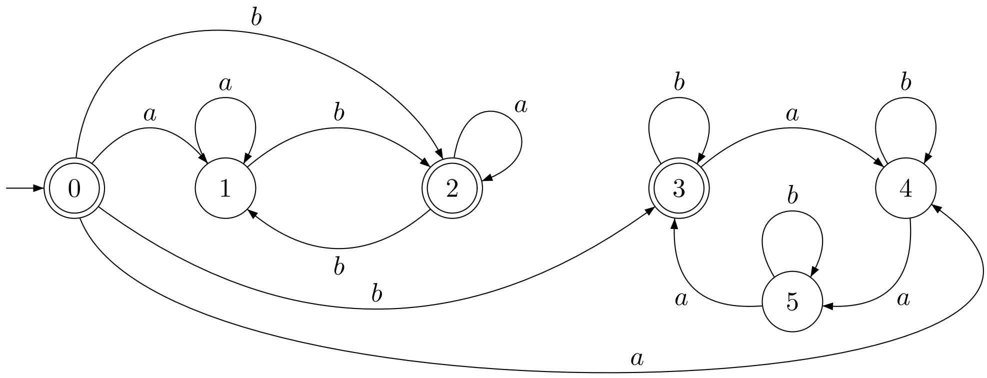
3. Pour la construction du "`ou`", on utilise la construction du cours à partir des deux automates précédents, le résultat du cours implique que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_3) = L_3$:



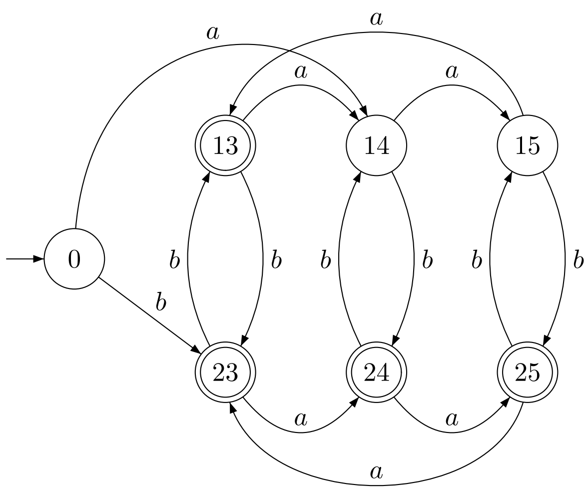
4. Pour la construction du “`et`”, comme indiqué dans le cours on peut faire le produit des deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$:



5. On supprime les epsilon-transitions de $\mathcal{A}_3$, ce qui donne après renommage des états :

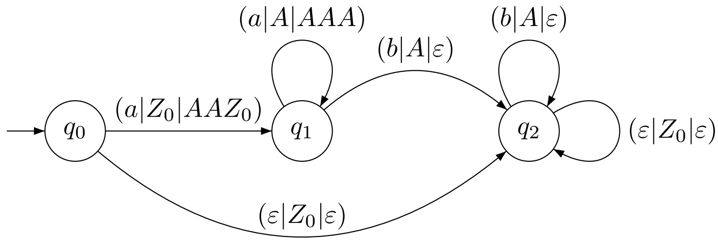


et ensuite, après déterminisation (je ne détaille pas les calculs ici) :



Exercice 2

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, q_f)$ l’automate à pile qui reconnaît par pile vide suivant :



Cet automate est déterministe.
Cet automate reconnaît $L = \{a^n b^{2n}\}$:

- $L \subseteq \mathcal{L}_{PV}(\mathcal{A})$: si u s'écrit $a^n b^{2n}$, alors si $n = 0$, $u = \varepsilon$ est reconnu par l'automate avec la transition $(q_0, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_2)$. Si $n > 0$, alors on va trouver un chemin victorieux dans $\mathcal{A}$. On effectue tout d'abord la transition $q_0 \to q_1$, qui mange un a dans le mot et empile deux AA au dessus de Z_0 dans la pile. Ensuite, on effectue $n-1$ transitions $q_1 \to q_1$ en lisant des a, ce qui a pour effet d'empiler en tout $2n$ fois le caractère A au dessus du Z_0 dans la pile. Ensuite, on effectue une fois $q_1 \to q_2$, puis $2n-1$ fois la transition $q_2 \to q_2$ qui mange les b de u. Le mot u est alors entièrement lu, et il reste à utiliser la transition $q_2 \to q_2$ pour manger le symbole Z_0 qui reste sur la pile, et la pile est vide.
- $\mathcal{L}_{PV}(\mathcal{A}) \subseteq L$: si u est reconnu par l'automate, cela signifie que soit $u = \epsilon$, soit u s'écrit par un certain nombre de a suivis d'un certain nombre de b (pas de retour de transition après avoir lu un b). Les transitions $q_1 \to q_1$ imposent pour le mot de pile avant la transition $q_1 \to q_2$ d'être de la forme A^{2n} où n est le nombre de a lus sur le mot à ce stade. Ensuite, les transitions imposent que pour arriver à pile vide, il faut avoir lu $2n$ fois la lettre b après les a (en effet, pour prendre la transition $q_2\varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_2)$ qui mène à pile vide, il faut avoir obtenu le caractère de haut de pile Z_0, ce qui n'est possible qu'après avoir dépilé tous les A de la pile.

Exercice 3

Supposons L régulier. D'après le lemme de l'étoile, il existe une constante N telle que pour tout mot $w \in L$ de taille supérieure à N, il existe une décomposition $w = xyz$ avec $|xy| \leq N$ et $y \neq \varepsilon$ tel que pour tout entier k, le mot $xy^k z$ est dans L.

Soit $w = a^N b^{N+1}$. Ce mot est de taille supérieure à N et donc d'après le lemme de l'étoile il s'écrit $w = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$ et $\forall k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$. Prenons $w' = xy^{100}z$

- d'une part $w' \in L$ d'après le lemme de l'étoile.
- d'autre part (faire un dessin), forcément $x = a^{n_1}$ et $y = a^{n_2}$, $z = a^{n_3} b^{N+1}$ avec $n_1 + n_2 + n_3 = N$ et surtout $n_2 > 1$, donc $w' = a^{n_1 + 100 n_2 + n_3} b^{N+1} \notin L$ car $n_1 + 100 n_2 + n_3 \geq N + 99 > N + 1$.

Il y a donc une contradiction donc L n'est pas régulier