INF 111, L1, 2004/2005

Feuille 5

Octobre 2004

Les Systèmes de Numération

Laure Gonnord
http://www-verimag.imag.fr/~gonnord/

1 La théorie

Soit b un entier naturel fixé que l'on nommera base, $b > 1$. Alors

Théorème 1 *Tout entier $a \neq 0$ admet une unique décomposition dans la base b, c'est-à-dire qu'il se décompose de façon unique comme ceci :*

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i b^i,$$

avec $\forall i, a_i \in [0, b-1]$ et $a_n \neq 0$.

Les chiffres qui "comptent" le plus, à savoir a_n, a_{n-1} sont appelés "chiffres de poids fort", et les chiffres qui comptent le moins sont appelés "poids faibles". On notera $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$[1] la décomposition du nombre a en base b.

Exemple 1 *La base 2 est formée des chiffres 0 et 1 appelés* **bits**. *Le nombre "dix"(c'est-à-dire $(10)_{10}$) s'écrit $(1010)_2$ car $10 = \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$.*

2 Petits exercices

Exercice 1 *Écrire tous les entiers de 0 à 10 en base 2.*

Exercice 2 *Écrire $(15)_{10}$ (le 15 usuel) en base 2. Même exo avec 21, 45, 128.*

Exercice 3 *Que valent 11 1001, 010101 (nombres écrits en base 2) en base 10 ?*

Exercice 4 *Quelques généralités :*
- *Quelle est la particularité des nombres pairs écrits en base 2 ? pourquoi ?*
- *Quelle est la particularité des multiples de 10 écrits en base 10 ? pourquoi ?*
- *Comment s'écrit b en base b ?*

Exercice 5 *La base 16 est aussi beaucoup utilisée en informatique. Les "chiffres" sont notés 0, 1, ...9, A, B, C, D, E, F.*
- *Comptez jusqu'à 20 en base 16.*
- *Convertir 100 en base 16.*
- *Que vaut $(21A9)_{16}$?*

Exercice 6 *Comment passer de la base 2 à la base 16 et inversement ? (Regarder la table des 16 premiers entiers écrits en base 2).*

[1] Quelquefois on note $\overline{a_n \ldots a_o}^{(b)}$

3 En C

On veut automatiser tout ça , pour cela on va faire l'exemple de la traduction base 10 vers base 2, soit M un nombre à traduire.

- On remarque que a_0 est le reste de la division euclidienne de M par 2 (c'est vrai, ça ?).
- Si $M_1 = \dfrac{M - a_0}{2}$ (nombre entier !), alors a_1 est le reste de la division euclidienne de M' par 2.
- ...
- Si $M_i < 2$, alors $n = i$ et a_n vaut M_i.

Traduisons tout cela en C, c'est immédiat à partir de ce qu'on vient d'écrire.

3.1 Base 2, version Printf

Dans cette section, on va imprimer les chiffres, le poids le plus faible à gauche, puisque l'on calcule les poids les plus faibles en premier.

```
void base10tobase2(int nb)
{
  int res; int quo;
  quo = nb;
  while (quo >= 2)
    {
      res = quo % 2;
      printf("%d ",res);
      quo = (quo - res)/2;
    };
  printf("%d",quo);
}
```

3.2 Base 2, version Tableaux

Maintenant on désire utiliser les chiffres de la décomposition en base 2, il est donc pratique de stocker la décomposition dans un tableau (de taille assez grande), que nous notons `bin`. La case `bin[i]` contiendra a_i. On va remplir le tableau de gauche à droite :

```
void base2(int n,int bin[MAX])
{
  int continuer = VRAI; int i = 0;
  int quo = n;  int reste = 0;

  while(continuer)
    {
      reste = quo %2;
      bin[i] = reste;
      quo = (quo-reste)/2;
      i = i+1;
      if (quo <= 1) {continuer = FAUX; bin[i] = quo;}
    }
}
```

Remarque 1 Quand on appelle cette procédure, il faut faire attention à ce que contiennent les cases du tableau. Il est fortement conseillé d'initialiser les cases avec -1 par exemple, comme cela on saura s'arrêter lors de l'affichage.

Remarque 2 Si ensuite on veut imprimer la décomposition, on pourra imprimer dans un sens ou dans l'autre, sans problème.