INF 111, L1, 2004/2005

Projet

novembre/décembre 2004

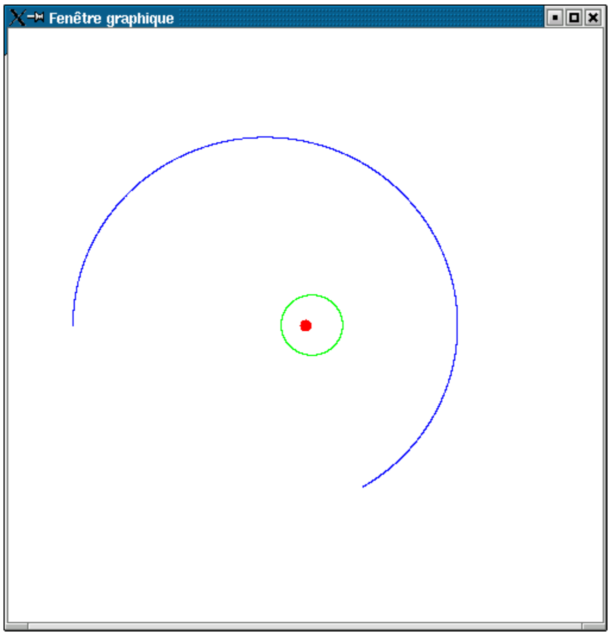
Le problème des trois corps et visualisation graphique

Laure Gonnord
http://www-verimag.imag.fr/~gonnord/
Version du 2004-11-15 10:33

1 Objet du projet

L'objet de ce projet est de faire une simulation d'un problème bien connu en physique, le problème de trois corps (planètes/satellites) en interaction gravitationnelle. Les équations différentielles du problème sont établies assez rapidement, le tout est de les résoudre et ensuite de visualiser joliment les trajectoires des planètes.

Le résultat final ressemblera à quelque chose du genre :



2 Un peu de physique

Cette section a été rédigée par Xavier Gnata, thésard à l'observatoire de Lyon, en physique (`gnata@obs.univ-lyon1.fr`). Il fait des modèles optiques d'un spectrographe qui sera embarqué sur le futur télescope spatial JWST.

2.1 Notations

Soient trois corps C_1, C_2 et C_3 considérés comme ponctuels en interaction gravitationnelle. On suppose que ces 3 corps sont situés dans un même plan ($z = 0$). Leurs coordonnées sont (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Soit M_1, M_2 et M_3 les masses respectives de ces trois corps. Soit $d(C_i, C_j)$ la distance entre les corps C_i et C_j. Soit $\overrightarrow{u}_{C_iC_j}$ un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{C_iC_j}$ et dirigé de C_i vers C_j.

REMARQUE 1 *Faire un dessin ! Ce dessin, avec les angles donnés plus bas, est exigé dans le rapport.*

2.2 Bilan des forces

On ne considère que la force de gravitation dans cette étude. Le corps de masse M_1 subit une force $F_{2\to 1} = -G\dfrac{M_1M_2}{d^2(C_1,C_2)}\overrightarrow{u}_{C_1,C_2}$ du fait de la présence de C_2 ainsi qu'une force $F_{3\to 1} = -G\dfrac{M_1M_3}{d^2(C_1C_3)}\overrightarrow{u}_{C_1C_3}$ du fait de la présence de C_3. On en déduit alors les forces subies par les corps de masse M_2 et M_3 par permutation des indices.

2.3 Équation de la dynamique ou toute autre appellation au programme

Le corps de masse M_1 subit donc une accélération $\overrightarrow{a_1}$ telle que :

$$\overrightarrow{a_1} = -G\Big(\frac{M_2}{d^2(C_1,C_2)}\overrightarrow{u}_{C_1C_2} + \frac{M_3}{d^2(C_1,C_3)}\overrightarrow{u}_{C_1C_3}\Big)$$

REMARQUE 2 *L'expression $\sum \overrightarrow{F} = M\overrightarrow{a}$ n'est valable que si M est une constante.*

On a des expressions similaires pour les deux autres corps.

2.4 Choix du repère et projections

La physique nous dit de nous placer dans le référentiel du centre de masse et d'utiliser des coordonnées polaires. Ici, on ne fait pas de physique «à la main». Le but est décrire les équations sous une forme qui simplifiera au maximum leur résolution numérique.On choisit donc un repère cartésien et on projette la relation $\sum \overrightarrow{F} = M\overrightarrow{a}$ appliquée à chacun des trois corps sur chacun des deux axes.

Projections Si on note θ l'angle fait par la droite (C_1C_2) avec l'axe des X, et, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ les vecteurs unitaires des axes OX et OY, on a l'expression suivante :

$$\overrightarrow{u}_{C_1C_2} = \frac{\cos\theta}{d(C_1,C_2)}\overrightarrow{u} + \frac{\sin\theta}{d(C_1,C_2)}\overrightarrow{v}$$

au signe près en fonction du sens pris pour θ.
Donc, en exprimant $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et en réinjectant dans l'équation des forces, on obtient :

- $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -GM_2\dfrac{x_1 - x_2}{((x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} - GM_3\dfrac{x_1 - x_3}{((x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_3)^2)^{3/2}}$
- $\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = -GM_2\dfrac{y_1 - y_2}{((x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} - GM_3\dfrac{y_1 - y_3}{((x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_3)^2)^{3/2}}$

2.5 Analyse numérique

Les équations A ce stade, on a établi un système de 6 équations différentielles d'ordre 2 liées. On en déduit un système de 12 équations différentielles d'ordre 1 liées [1] :

- $\dfrac{dx_1}{dt} = x_4$
- $\dfrac{dx_2}{dt} = x_5$
- $\dfrac{dx_3}{dt} = x_6$
- $\dfrac{dx_4}{dt} = -GM_2 \dfrac{x_1 - x_2}{((x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{3/2}} - GM_3 \dfrac{x_1 - x_3}{((x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_3)^2)^{3/2}}$
- $\dfrac{dx_5}{dt} = -GM_1 \dfrac{x_2 - x_3}{((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)^{3/2}} - GM_3 \dfrac{x_2 - x_1}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}}$
- $\dfrac{dx_6}{dt} = -GM_1 \dfrac{x_3 - x_1}{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)^{3/2}} - GM_2 \dfrac{x_3 - x_2}{((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2)^{3/2}}$
- et celles en dy ...

La résolution Le système précédent se résout à la main, mais on va plutôt utiliser les capacités calculatoires de l'ordinateur. On va utiliser des "méthodes numériques d'intégration d'équations différentielles". Ce sont des méthodes qui permettent d'avoir une/les solution(s) approchée(s) d'équations différentielles (ou de systèmes d'équations différentielles, comme ici). Ces méthodes font beaucoup de calculs, mais comme l'on dispose d'une grande capacité calculatoire, il n'y a pas de problème. Les méthodes que nous verrons seront les suivantes :

- Euler : `http://www.physics.drexel.edu/courses/CompPhys/Integrators/simple.html` et `http://stephane.gonnord.org/PCSI/Info/EULER.PDF`. (en TD)
- Runge-Kutta : `http://www.physics.drexel.edu/courses/CompPhys/Integrators/rk4.html`

Remarque 3 *Le système de trois corps qu'on l'on a choisi d'étudier est constitué d'un corps très massif immobile C_1 et des deux corps C_2 et C_3 beaucoup moins massifs en orbite autour de C_1. Les masses et les distances sont telles que l'interaction gravitationnelle entre C_2 et C_3 est négligeable. Par exemple, $F_{1\to 2} << F_{2\to 3}$. Le code doit donc calculer deux orbites kepleriennes (des ellipses).*

3 Données numériques

On prendra pour données celles de Mars et de ses satellites Phobos et Doemos [2] :

- Constante de gravitation : $G = 6.67259.10^{-11} SI$.
- Masses : $M_1 = 6.4185.10^{23} kg$, $M_2 = 1.27.10^{23} kg$, $M_3 = 1,8.10^{23} kg$.
- Positions initiales : On suppose que à $t = 0$ les planètes sont alignées sur l'axe des abscisses : 0 pour Mars, $3.752.10^7 m$ pour le premier satellite, $-2.346.10^8 m$ pour le deuxième.
- Vitesses initiales : 0 pour Mars, $950 m.s^{-1}$ pour le premier satellite, et $-380 m.s^{-1}$ pour le deuxieme.

Remarque 4 *Pour des raisons de précision que l'on expliquera, on écrira :*

```
double GM1 = 6.67259 * 6.4185e12;
```

[1] Comment transformer une équation $y" = f(y)$ en deux équations du premier ordre ?

[2] Qui ont été pompées sur un vieux rapport de projet, et qui donc ne sont pas certifiées exactes. On est même sûr que les initiales ne correspondent pas exactement à la réalité.

au lieu de

```
double GM1 = 6.67259e-11 * 6.4185e23;
```

REMARQUE 5 *On pourra aussi essayer avec* $1069 m.s^{-1}$ *et* $427 m.s^{-1}$ *pour les deux satellites (trajectoires circulaires).*

4 Avancement du projet

Avant Lire le sujet, comprendre les équations différentielles et leur projection, et ce que l'on va faire. Début du rapport : dessin et explication des équations.

Séance 1 Méthodes numériques d'intégrations d'équations différentielles : théorie de la méthode d'euler, code, tests. A faire : rechercher des données pour d'autres systèmes planétaires, et compléter le rapport avec ces données.

Séance 2 Utilisation de la méthode de RK (code donné). Visualisation graphique, interaction avec l'utilisateur pour le choix des couleurs, tests, impression de screenshots.

Séance 3 Recherche de conditions initiales qui font diverger le problème, fin du rapport. Démo et ramassage du rapport.