PCSI 842, 2003 **TP Maple - 2**

Les 15 et 22 Mai 2003

Espaces euclidiens

Laure (Danthony-)GONNORD - `gonnord.imag.fr`
`http://www-verimag.imag.fr/~gonnord/`

Papier gnagna... `restart;` *gnagna* `with(linalg);` *gnagna sauvegarde.*

1 Orthogonalisation

On se propose d'orthogonaliser des familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, puis $\mathbb{R}_6[X]$. Le procédé de Schmidt appliqué à une base $(e_1, ..., e_n)$ conduit à la famille orthogonalisée $(f_1, ..., f_n)$, avec $f_1 = e_1$, et pour tout $i > 1$, $f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{<f_i|f_k>}{\|f_k\|^2} f_k$. Bien entendu, le produit scalaire reste à définir : dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un produit scalaire naturel (en Maple, c'est la fonction `dotprod`, qui prend en entrée deux vecteurs et retourne un scalaire), mais dans $\mathbb{R}_n[X]$, on dispose d'une foultitude de produits scalaires classiques (qui seront définis comme des fonctions de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$).

Maple : GramSchmidt, add, dotprod, evalm, seq, orthopoly, int.

1. Orthonormaliser la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la fonction `GramSchmidt`.
2. Ecrire une fonction `orthogonalisation`, prenant en entrée une liste de vecteurs (pas nécessairement de $\mathbb{R}^n$) ainsi qu'un produit scalaire (une fonction de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$), et retournant la base orthogonalisée. On devra avoir impérativement un programme de la forme :

   ```
   orthogonalisation:=proc(......)
    local ...;
    ...
    RETURN(...)
   end;
   ```

   On suggère d'utiliser la fonction `add` plutôt que `sum` : ele pose moins de problème dans la gestion des variables locales... Vérifier la validité de votre procédure avec :
   `orthogonalisation([v1,v2,v3],dotprod);`.
3. Définir une fonction `scal1` prenant en entrée deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et retournant $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Vérifier que `scal1(X,X^3);` retourne $\frac{2}{5} \cdots$
4. Orthogonaliser la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ pour ce produit scalaire. Vérifier que les polynômes obtenus sont proportionnels aux polynômes de Legendre (voir le package `orthopoly`).
5. Même chose avec les polynômes d'Hermite, Tchebichev et Laguerre, respectivement associés aux produits scalaires $<P|Q>= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)Q(t)dt$, $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$, et enfin $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)dt$.

► <u>Les Maths derrière :</u> *Procédé de Schmidt; polynômes orthogonaux.*

2 Identification d'une rotation/réflexion

Dans cet exercice, $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Maple : orthog, evalm, identity

1. Vérifier que A est une matrice de rotation. Déterminer l'axe de la rotation. Orienter cet axe, puis déterminer l'angle de la rotation.
2. Vérifier que B est une matrice de réflexion. Déterminer le plan de la réflexion. On donnera une base de ce plan, puis un vecteur de l'orthogonal.
3. Ecrire une fonction `ident_rotation` prenant en entrée une matrice $(3,3)$, retournant `false` si ce n'est pas une matrice de rotation, et sinon, retournant un vecteur orientant l'axe de rotation, et l'angle de cette rotation.
4. Ecrire une fonction `ident_reflexion` prenant en entrée une matrice $(3,3)$, retournant `false` si ce n'est pas une matrice de réflexion, et sinon, retournant un vecteur dirigeant l'orthogonal du plan de la réflexion.
5. Donner la nature précise des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à :

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, D = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}, E = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -26 & -2 & -7 \\ -2 & -23 & 14 \\ 7 & -14 & -22 \end{bmatrix}.$$

► Les Maths derrière : *Groupe orthogonal, réflexions, rotations.*

3 Construction d'une matrice de rotation/réflexion

Si f est la rotation d'axe orienté par v_0 et d'angle θ, et g la réflexion par rapport à $v_0^{\perp}$, on a :

$$f(v) = \frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0 + \cos\theta\Big(v - \frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0\Big) + \frac{\sin\theta}{\|v_0\|}v_0 \wedge v \quad , \quad g(v) = v - 2\frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0.$$

Maple : vector, dotprod, crossprod, evalm, convert, list, genmatrix

1. Calculer l'image du vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par la rotation d'axe orienté par $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. En utilisant la fonction `genmatrix` (après une petite conversion en liste...), construire la matrice de la rotation précédente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier sa trace...
3. Ecrire une fonction `generateur_rotation` prenant en entrée un vecteur v_0 de $\mathbb{R}^3$ et un angle θ, et retournant la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par v_0, et d'angle θ.
4. Donner la matrice dans la b.c. de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5. Construire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $v_0^{\perp}$.
6. Ecrire une fonction `generateur_reflexion` prenant en entrée un vecteur v_0 de $\mathbb{R}^3$, et retournant la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $v_0^{\perp}$.
7. Donner la matrice dans la b.c. de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^{\perp}$.