HEC 1998 - Option Scientifique - Maths I - Partie II

Eléments de correction - DANTHONY Laure

1 Remarques, commentaires

C'est un exercice (problème ?) facile, en ce qui concerne l'informatique. En fait ici, comme dans le TP4, l'informatique est plus un prétexte pour faire des probabilités. Ceci dit, un peu de Pascal, c'est toujours agréable :-). Il y a un peu de calcul, tout de même, mais rien que des trucs classiques, déjà vus. Notez au passage l'utilisation de la fonction G, qui est ici la fonction génératrice de la variable aléatoire X_n. $G = \sum P(X_n = k)X^k$, qui fournit plein de résultats intéressants. Ce corrigé fait rapidement comporte certainement quelques coquilles que vous m'excuserez.

2 Correction

1. Elle contiendra le maximum des 10 premiers éléments du tableau t. Bien remarquer que l'on a utiliseé le mot clef `var` pour cela.
2. a) Il y en a $n!$.
   b) On fait de 1 à n affectations de type `max:=...` dans la procédure recherche.
   c) Si $\forall i, t[i] = n + 1 - i$, pour $i_1 > i_2$, on a $t[i_1] < t[i_2]$. Dans ce cas, on ne réalise qu'une seule affectation.
   d) • $V(1, n)$ est le nombre de rangements pour que l'algorithme ne réalise qu'une seule affectation. En fait il faut (et il suffit) que la case 1 contienne le maximum des n entiers. Ensuite, on range les autres comme on veut. D'où $(n - 1)!$ possibilités.
      • Pour avoir n affectations, il faut ranger les nombres dans l'ordre croissant. Donc $V(n, n) = 1$.
   e) • Pour ranger les $n + 1$ éléments tels qu'il y a i affectations, soit on range le maximum dans $t[n+1]$ (et alors les autres chiffres doivent être rangés de sorte que le programme ne réalise que $i - 1$ affectations), soit on le range dans une des autres cases - n possibilités (et alors on doit ranger les autres de façon à faire i affectation.), d'où :
      $$V(i, n + 1) = V(i - 1, n) + nV(i, n),$$
      formule valable pour $2 \leq i \leq n$ et $n \leq 2$.
      • Pour $i = 1$ la formule donne $V(1, n + 1) = V(0, n) + n(1, n)$. Elle est valable car $V(1, n + 1) = n!$, $V(0, n) = 0$ et $V(1, n) = (n - 1)!$. Pour $i = n + 1$ ça marche aussi.
      • Pour $n = 1$ on doit vérifier 2 égalités. C'est bon, ça marche.
   f) • $P_{n+1}(X) = \sum_{i=1}^{n+1} V(i, n + 1)X^i$. On écrit la relation de récurrence vérifiée par les $V(i, n)$ à l'intérieur du signe somme et on obtient la relation voulue sur les P_n.

- On écrit en extention la relation précédente en s'arrêtant à $P_1(X) = 1$ (pourquoi ?) : $P_n(X) = (n-1+X)P_{n-1}(X) = (n-1+X)(n-2+X)P_{n-2}(X) = \ldots$. Finalement on obtient :
$$P_n(X) = \prod_{j=1}^{n-1}(n-j+X).$$

3. a) $G_n(1) = \frac{1}{n!}P_n(1) = \frac{1}{n!}n(n-1)\ldots 3.2 = 1$. Ouf ! (propriété des fonctions génératrices)

   b) En utilisant la relation sur les $P_n(X)$, on obtient immédiatement $G_{n+1}(X) = \frac{n+X}{n+1}G_n(X)$.

   c) Calcul de $G_n'(1)$: $G_n'(X) = \frac{1}{n!}P_n'(X)$. Alors on dérive $P_n(X)$:
   $$P_n'(X) = \prod_{j=2}^{n-1}(n-j+X) + \prod_{j=1, j\neq 2}^{n-1}(n-j+X) + \ldots + \prod_{j=1, j\neq n-1}^{n-1}(n-j+X).$$
   En remplaçant X par 1 et en faisant en sorte que le numérateur soit toujours le même, à savoir $\prod_{j=1}^{n-1}(n-j+1)$, on obtient : $P_n'(1) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(n-j+1)}{n} + \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(n-j+1)}{n-1} + \ldots + \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(n-j+1)}{2}$, or $\prod_{j=1}^{n-1}(n-j+1) = n!$, d'où le résulat voulu, c'est à dire que les deux quantités sont égales.

4. a) $P(X_n = 1) = \frac{\text{nombre de procédures à 1 affectation}}{\text{nombre de rangements}} = \frac{V(1,n)}{n!} = \frac{(n-1)!}{n} = \frac{1}{n!}$. De façon générale on a de même $P(X_n) = i = \frac{V(i,n)}{n!}$.

   b) $G_n'(1)$ est l'espérance cherchée (pourquoi ?) donc $E = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

   c) C'est le coefficient de X^2 dans $P_n'(X)$, d'où le résultat (après un peu de calcul). En l'infini c'est équivalent à $\frac{1}{n^2}$.

5. a) C'est une conséquence immédiate de la relation sur les $V(i,n)$.

   b) Si $i = 1$ ou $i = 2$, la propriété est vraie. Supposons la propriété vraie pour tout $i < k$, k fixé. La question précédente donne pour $n = k$ et $i \in I_k$:
   $$kP(X_k = i) = (k-1)P(X_{k-1} = i) + P(X_{n-1} = i-1)$$
   On obtient donc $kP(X_k = i) = \sum_{j=1}^{k} P(X_{j-1} = i-1)$. La question I-3, appliquée à la suite $w_n = nP(X_n = i)$ donne alors, vu que par hypothèse de récurrence $P(X_{j-1} = i-1) \sim$ *gnagnagna*, fournit $w_n \sim \frac{1}{i-2}\int_1^n \frac{(\ln t)^{i-1}}{t}dt$, que l'on intègre par parties, et celà donne finalement le résultat au rang k.