MATHÉMATIQUES
Épreuve C
Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

RAPPELS.

Si N est un entier naturel non nul, la commande en langage PASCAL : $X := random(N) + 1$; affecte à la variable X, de type integer, une valeur aléatoire entière k vérifiant : $1 \leq k \leq N$. On admettra qu'à chaque exécution, la probabilité d'obtenir un entier k fixé est de $\frac{1}{N}$.
La commande : Y:=random; affecte à la variable Y, de type real, une valeur aléatoire réelle p, $(0 \leq p < 1)$. On admettra que cette valeur suit la loi uniforme sur [0,1] à chaque exécution.
Les appels successifs aux fonctions random sont considérés comme des épreuves indépendantes.

PARTIE I : Le but de cette partie est de montrer comment on peut exprimer différentes variables aléatoires à l'aide d'une variable uniforme.
Dans toute cette partie, et dans la suivante, U désignera une variable suivant la loi uniforme sur [0,1].

1.1.a. On considère la variable aléatoire D définie par : $D = -ln(U)$ sur $[U \neq 0]$ et $D = 0$ sur $[U = 0]$.
Quel est l'ensemble des valeurs prises par D? Déterminer sa fonction de répartition et en déduire sa loi.
1.1.b. Dans cette question, λ est un réel strictement positif et on considère la variable aléatoire définie par

$$D_\lambda = \frac{D}{\lambda}.$$

Déterminer sa loi. Rappeler l'espérance et la variance de D_λ.

1.2. On dit qu'une variable aléatoire G suit la loi géométrique de paramètre p, $(0 < p < 1)$, si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tout entier naturel i, non nul :

$$P[G = i] = p(1-p)^{i-1}.$$

1.2.a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $1 - U$?

1.2.b. Montrer que pour tout q réel, $(0 < q < 1)$, et tout élément α de $]0,1]$, il existe un unique entier naturel non nul n_0 tel que : $q^{n_0} < \alpha \leq q^{n_0 - 1}$.

1.2.c. Montrer que, si on pose, pour tout k, entier naturel non nul :

$$E_k = [(1-p)^k < 1 - U \leq (1-p)^{k-1}],$$

alors la famille des E_k, lorsque k décrit $\mathbb{N}^*$, constitue avec $[U = 1]$ un système complet d'évènements.
1.2.d. Montrer qu'on définit une variable aléatoire G suivant une loi géométrique en posant :
$$G = 1 \text{ sur } [U = 1] \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ G = k \text{ sur } E_k.$$
Préciser son espérance.

PARTIE II : Simulation de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

2.1.a. On considère un réel p vérifiant : $O < p < 1$. On définit la variable aléatoire B par $B = 1$ sur l'évènement $[U \leq p]$ et $B = 0$ sur $[U > p]$.
Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

2.1.b. Que fait la procédure suivante :

```
procedure MACHIN1(p : real; var a : integer);
var Y :real;
begin
    Y:=random;
    if (Y<= p) then a:= 1 else a:= 0
end;
```

Quelle est la probabilité d'obtenir 1 dans a après son exécution?

2.2. Dans cette question, on souhaite généraliser la technique employée lors de la question précédente pour simuler une variable aléatoire V prenant n valeurs (n est un entier naturel non nul).
Plus précisément, on suppose données une famille $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs et une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'entiers distincts deux à deux telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ et } \forall i, (1 \leq i \leq n) \Rightarrow P[V = a_i] = p_i.$$

2.2.a. Montrer que pour tout élément u de $]p_1, 1]$, il existe un unique entier r, vérifiant $2 \leq r$ et $r \leq n$ de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{r-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{r} p_i.$$

2.2.b. Pour r vérifiant $(2 \leq r \leq n)$, on note A_r l'évènement :

$$\sum_{i=1}^{r-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^{r} p_i.$$

Montrer qu'on peut définir une variable aléatoire W en posant :

$W = a_1$ sur $[U \leq p_1]$

$\forall r, \ (2 \leq r \leq n) \ \Rightarrow \ (W = a_r \text{ sur } A_r)$.

Déterminer sa loi.

2.2.c. Dans cette question et dans la suivante, on pose $n = 4$ et on note Proba une variable informatique, définie par la déclaration :

```
var Proba : array[1..4] of real;
```

et initialisée de sorte qu'elle contienne, dans l'ordre, les réels : $p_1 = O.1$, $p_2 = O.3$, $p_3 = O.2$, $p_4 = O.4$.

On considère la fonction définie par les lignes :

```
function MACHIN2(x : real):integer;
var I : integer; C : real;
begin
    C:= 0; I:= 0;
    while (x>C) do begin I:=I+1; C:=C+Proba[I] end;
    MACHIN2:=I
end;
```

Ecrire les différentes affectations des variables I et C lorsqu'on appelle MACHIN2(0.45).

2.2.d. On suppose que $\forall i \in \{1\dots4\}$, $a_i = i$, et on demande de compléter la procédure définie par les lignes suivantes, en s'inspirant de ce qui précède, afin de simuler une variable aléatoire de même loi que V.

```
procedure MACHIN3(var W : integer);
var x,CP : real; I: integer;
begin
    x:=random;
    if x= 0 then W:= 1 else ...
end;
```

PARTIE III : Des tirages successifs sans remise

Le but de cette partie est d'essayer de simuler sur ordinateur l'expérience suivante : un sac contient N jetons (N entier naturel non nul); les jetons sont numérotés de 1 à N et tirés successivement et sans remise.

A. Un premier essai de simulation.

On propose la suite d'instructions suivantes

```
procedure TRUC1(N : integer; var X,Y : integer);
var I : integer;
begin
    X:=random(N)+1; I:= 1;
    repeat Y:=random(N)+1; I:=I+1; until((X <>Y) or (I= 100))
end;
```

3.A.1. Quelle est la probabilité que I soit égal à 100 à l'issue de l'exécution de la procédure ?

3.A.2. On note T la variable aléatoire égale au nombre d'appels à la fonction random effectués lors de l'exécution de cette procédure.
Déterminer les valeurs prises par T, sa loi et son espérance.

3.A.3. On considère deux entiers naturels distincts i et j ($1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$). Déterminer la probabilité pour que X et Y contiennent respectivement les valeurs i et j à l'issue de la procédure.

3.A.4. Quelle est la probabilité, dans l'expérience décrite au début de la partie A, d'obtenir le couple (i, j) dans cet ordre lorsque on tire seulement deux jetons ?
Que peut-on conclure ?

B. Un exemple de simulation d'un tirage sans remise.
Dans toute cette partie on considérera une variable globale déclarée par la ligne :
var Tb : array[1..N] of integer;
la constante N ayant été supposée initialisée préalablement à une valeur entière supérieure ou égale à 2.

3.B.1. Que fait la procédure :

```
procedure TRUC2(Z:integer);
var AUX,X:integer;
begin
    X:=random(Z)+1; AUX:=Tb[Z]; Tb[Z]:=Tb[X]; Tb[X]:=AUX
end;
```

3.B.2. Uniquement dans cette question, on suppose que N a été initialisée à 5.
Lors de l'exécution de la procédure suivante :

```
procedure TRUC3;
var AUX,I,X,Z:integer;
begin
    for I:=1 to N do Tb[I]:=I;
    for Z:=N downto 2 do
    begin
        X:=random(Z)+1;write(Z); writeln(X);
        AUX:=Tb[Z]; Tb[Z]:=Tb[X]; Tb[X]:=AUX
    end
end;
```

les affichages des variables Z et X ont été les suivants (dans l'ordre chronologique) :
(Z=5, X=4), (Z=4,X=2), (Z=3,X=2), (Z=2,X=1).
Quel a été, à chaque tour de boucle, le contenu de la variable Tb ?

3.B.3. On revient au cas général.
Quelle est la probabilité pour que, après l'exécution de la procédure, le tableau Tb contienne, dans cet ordre, $x_1, x_2, ..., x_N$ où les x_i sont fixés, distincts, et vérifient : $1 \leq x_i \leq N$?

FIN