14,20 et 21 novembre 2001

Calculs approchés de π

Laure Danthony
http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon/

Généralités, Objectifs

Le but de ce TP est de comparer les différentes méthodes numériques que nous avons pour calculer des valeurs approchées de π. Ces diverses méthodes sont classiques et peuvent faire l'objet de problèmes de mathématiques aux concours. Il faut avoir une idée du champ d'application de chacune de ces méthodes et aussi de leur rapidité de convergence.

On fournit un squelette des programmes dans le fichier `pi_squelette.pas` disponible dans le répertoire habituel. La constante `EPS=10e-6` sera utilisée dans tous vos programmes pour s'arrêter lorsque l'on a obtenu une valeur de π à 10^{-6} près. On comparera le nombre de pas nécessaires pour avoir une précision suffisante pour toutes les méthodes approchées utilisées.

1 Valeur approchée par dichotomie

Cette méthode utilise le fait que π est une racine de la fonction $sin(x)$. De plus, cette racine est située entre 2 et 4, et la fonction sinus a le bon goût d'être strictement décroissante sur l'intervalle $[2, 4]$

► Exo :

1. Faire un dessin !
2. Quel théorème bien connu assure l'existence d'une racine entre 2 et 4 pour la fonction sinus ?

Dans tout le programme, on fait en sorte que deux variables, disons a et b, sont telles que on peut toujours appliquer le théorème précédent sur l'intervalle $[a, b]$, avec $b - a$ quantité qui décroît au fur et à mesure. Au bout d'un certain temps, $\frac{b+a}{2}$ sera une bonne approximation de la racine cherchée.

► Exo :

1. Comment faire décroître la taille l'intervalle $[a, b]$ (*i.e.* modifier soit a, soit b), de façon à ce que cet intervalle possède toujours les bonnes propriétés ?
2. Obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près à l'aide de cette méthode et de PASCAL.
3. Donnez l'ordre de grandeur de la convergence de la méthode.

2 Valeur approchée par somme partielle de série

On utilise ici l'égalité bien connue : $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Pour calculer une valeur approchée de π, on se contente ici d'obtenir une somme partielle de série de précision ce que l'on veut[1].

▶ En se rappelant du TP prédédent et en faisant en sorte de s'arrêter à la précision voulue, écrire un programme PASCAL utilisant cette méthode pour calculer π.

3 Valeur approchée par la méthode de Newton

On utilise ici comme dans la première section le fait que $sin(\pi) = 0$. La méthode de Newton consiste à calculer une suite de points p sur la courbe de la fonction sinus, laquelle suite de points tend vers le point de coordonnées $(\pi, \sin \pi) = (\pi, 0)$.

Ainsi, si on se donne le point d'abscisse x_n (donc de coordonnées $(x_n, \sin x_n)$ sur la courbe), le point suivant de la suite sera le point de la courbe dont l'abscisse est l'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe au point de coordonnées $(x_n, \sin x_n)$. On obtient donc un nouveau point sur la courbe, et ainsi de suite.

▶ Exo :

1. Sur un dessin, se persuader du bien-fondé de cette méthode, avec pour point de départ $(3.0, \sin 3.0)$. Dans quels cas cette méthode va-t-elle marcher ?
2. Exprimer la relation de récurrence vérifiée par les abscisses x_n des points de la suite.
3. Programmer en PASCAL cette méthode et obtenir une valeur approchée de π à la précision voulue.

4 Approximations d'intégrales

On utilise ici le fait que $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$ (le vérifier à l'aide d'un dessin). Les trois méthodes présentées ici consistent à découper l'intégrale que l'on désire calculer en n petits bouts, l'aire de chacun de ces petits bouts étant approchée par quelque chose que l'on sait assez facilement calculer (*i.e.* par des opérations arithmétiques élémentaires). Les différentes variantes pour "approcher les petits bouts" sont :

– **les rectangles** : on montre en maths que $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ converge vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ en $O(\frac{1}{n})$.

[1] On rejoue le TP précédent

- **les trapèzes** : de même on montre que $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(\frac{k}{n}) + f(\frac{k+1}{n})}{2}$ converge vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ en $O(\frac{1}{n^2})$.
- **Simpson** : on montre que $S_n = \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big)+4f\big(\frac{2k+1}{2n}\big)+f\big(\frac{k+1}{n}\big)$ converge vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ en $O(\frac{1}{n^4})$.

► Exo

1. Montrez à l'aide de dessins que les deux premières approximations portent bien leur nom.
2. Constatez que tout revient en fait à calculer des sommes partielles de série.
3. Codez la méthode des rectangles de manière à obtenir π à la précision voulue.
4. Faites des copier-coller judicieux afin de coder les 2 autres méthodes. Comparez expérimentalement les convergences en faisant afficher le nombre de pas de calcul effectués par les différents programmes.