

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES I

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme; ce dernier est explicitement défini dans la partie II.

Notations.

Pour tout entier naturel n non nul on notera par I_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites numériques, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ signifiera que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I. Quelques résultats préliminaires.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1) a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P(X) \in \mathbf{R}_n[X], \varphi(P(X)) = P(X+1)$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1} .

2) On suppose que (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) appartiennent à \mathbf{R}^{n+1} et vérifient :

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, b_p = \sum_{k=0}^p C_p^k a_k$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n)$, $(b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n)$ et M .

b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres b_0, \dots, b_k .

B

Dans cette sous-partie $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[1, +\infty[$, telles que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ soit divergente et $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(n)$.

1) On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leq q < N$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq q$, on a : $g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n)$.

b) En déduire : $\int_q^N g(t) dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q)$.

2) On considère un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geq c$ tel que $(1 - \varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \varepsilon)g(n)$ dès que $n \geq q$.

b) En déduire que, pour tout entier $N > q$:

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q$$

3) Montrer que : $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n g(t) dt$.

4) En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

Partie II. Etude d'un algorithme.

Dans cette partie n désignera un entier naturel non nul.

On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

- 1) une constante entière $C \geq 2$.
- 2) un type `tableau=array[1..C] of integer ;`

L'introduction de la constante C n'étant faite que pour pouvoir définir le type `tableau`, on pourra la considérer aussi grande que l'on veut.

On considère alors la procédure suivante.

```

procedure Recherche(n : integer ; t : tableau ; var max : integer) ;
  var i : integer ;
  begin
    max := t[1] ;
    for i := 2 to n do
      begin
        if t[i] > max then max := t[i] ;
      end ;
    end ;

```

- 1) Quel sera le contenu de la variable `max` après l'appel dans le programme principal de `Recherche(10, t, max)` ?
- 2) On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose que ces nombres sont affectés aux n premières "cases" de `t`, variable de type `tableau`, (un entier par case).
 - a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` ?

Pour tout i appartenant à I_n , on note par $V(i, n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` tels que l'appel de la procédure `Recherche(n, t, max)` provoque i affectations de la variable `max` au cours de son exécution.

On admettra que ce nombre $V(i, n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois que ceux-ci soient distincts.

- b) Vérifier qu'effectivement le nombre d'affectations possibles de la variable `max` au cours de l'exécution de `Recherche(n, t, max)` appartient à I_n .
Par convention, on pose $V(0, n) = 0$ et $V(k, n) = 0$ lorsque $k > n$.
- c) Quel est le nombre d'affectations de la variable `max` au cours de l'exécution de `Recherche(n, t, max)` si, pour tout $i \in I_n$, $t[i] = n + 1 - i$?
- d) Montrer que $V(1, n) = (n - 1)!$ et déterminer $V(n, n)$.
- e) On suppose dans la première sous-question qui suit que $2 \leq i \leq n$.
 - Montrer que $V(i, n + 1) = V(i - 1, n) + nV(i, n)$.

On pourra distinguer les rangements de $n + 1$ entiers distincts deux à deux dans `t[1], ..., t[n+1]`, suivant que `t[n+1]` contient ou non le plus grand de ces $n + 1$ entiers.

 - Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n + 1$.
 - Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leq i \leq 2$.
- f) On définit le polynôme $P_n(X)$ par $P_n(X) = \sum_{i=0}^n V(i, n) X^i$.
 - Montrer que $P_{n+1}(X) = (n + X)P_n(X)$.
 - En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3) On pose $G_n(X) = \frac{1}{n!} P_n(X)$.

- a) Calculer $G_n(1)$.
- b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.
- c) Comparer $G'_n(1)$ et $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Mathématiques I 3/3

- 4) Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n "cases" $t[1], \dots, t[n]$ d'une variable t de type **tableau**.
Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité p : ces rangements étant de probabilités égales.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche**(n, t, \max).
- a) Déterminer la probabilité de l'événement ($X_n = 1$) et de façon générale, exprimer, lorsque i appartient à I_n , $p(X_n = i)$ à l'aide de $V(i, n)$ et n .
- b) Déterminer l'espérance de X_n .
- c) Montrer que, si n est supérieur ou égal à 2, alors : $p(X_n = 2) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$.
Donner un équivalent simple de $p(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 5) a) Si i appartient à I_n , montrer que : $(n+1)p(X_{n+1} = i) - np(X_n = i) = p(X_n = i-1)$.
- b) En utilisant les résultats de la partie I.B. montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, p(X_n = i) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)! n} (\ln n)^{i-1}$$

Partie III. Calcul de l'inverse d'une certaine matrice.

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i, n)$ a toujours la signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que : $V(0, 0) = 1$ et $V(i, 0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}}$ la matrice appartenant à $M_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{j-i} V(i-1, j-1)$ pour tout $(i, j) \in (I_{n+1})^2$.

Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

- 1) Montrer que $X(X-1)\dots(X-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} V(k, n) X^k$.
- 2) On définit la famille de polynômes $(N_i(X))_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}$ par $N_0(X) = 1$, $N_1(X) = X$ et de façon générale $N_j(X) = X(X-1)\dots(X-j+1)$ pour tout $j \in I_n$.
- a) Montrer que $(N_i(X))_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à $(N_i(X))_{i \in \{0, 1, \dots, n\}}$?
- 3) a) Montrer que A est inversible.
Pour tout $(i, j) \in (I_{n+1})^2$, l'élément situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} est noté $\omega(i-1, j-1)$.
- b) Montrer que : $X^n = \sum_{k=0}^n \omega(k, n) N_k(X)$.
- 4) a) Pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, comparer p^n et $\sum_{k=0}^p k! \omega(k, n) C_p^k$.
- b) En utilisant les résultats de la partie I.A. donner une expression de $\omega(k, n)$.

Partie IV. Interprétation des nombres $\omega(k, n)$.

Dans cette partie encore n désignera un entier naturel non nul.

Soit k un entier naturel non nul, on appelle k -partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ dont les éléments A_i , pour $i = 1, \dots, k$, sont des parties non vides de I_n , deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I_n . On note par $s(k, n)$ le nombre de k -partitions de I_n et on convient que $s(0, n) = 0$.

- 1) Déterminer $s(1, 1)$, $s(n, n)$, $s(1, n)$ et $s(k, n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n .
- 2) Soit p un entier naturel non nul.
- a) Déterminer le nombre de n -listes dont les éléments appartiennent à I_p . On rappelle que dans une telle liste les éléments ne sont pas forcément distincts.
- b) Soit k un élément de I_p , déterminer le nombre de n -listes dont les éléments appartiennent à $\{1, \dots, k\}$, chacun des nombres $1, \dots, k$ apparaissant au moins une fois dans la liste.
- c) Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^p k! s(k, n) C_p^k$.
- 3) Comparer $s(k, n)$ et $\omega(k, n)$ lorsque $k \in \{0, \dots, n\}$.