HEC 922, 2001/2002 **TP 1**

Les 18,19 et 25 Septembre 2001

Manipulation de polynômes

Laure Danthony
`http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon/`

Objectifs du TP, consignes

L'objectif de ce TP est double :
- Premièrement, élaborer une boîte à outils assez fournie qui permettra de manipuler les polynômes en PASCAL ;
- Deuxièmement, découvrir les polynômes cyclotomiques et une de leurs propriétés, assez "amusante".

Ceci dit, la première partie est assez fournie et la terminer constitue un objectif tout à fait satisfaisant. Les redoublants pourront quant à eux choisir entre les deux possibilités suivantes :
- Recoder entièrement la première partie.
- Récupérer la correction de la première partie et coder uniquement la deuxième partie ...

... ou toute autre possibilité intermédiaire. Cela ne les dispensera cependant pas de la lecture **complète et approfondie** de la première partie.

Sont joints à ce TP : en version papier, des exemples MAPLE pour tester vos programmes, le squelette des programmes demandés (les cas pathologiques sont traités) ; en version électronique, ces mêmes documents ainsi que la correction de la première partie, et une correction du TP entier (à ne pas consulter pendant le TP !). Cette même correction sera distribuée à la fin.

Vous pouvez retrouver tous les documents constituant ce TP sur ma page, et aussi sur le réseau NOVELL.

Pour terminer, trois consignes importantes :

1. **Utilisez avec exagération le papier et le crayon ...**
2. **Les tests sont INDISPENSABLES : les utiliser sans modération**
3. **N'hésitez pas à embêter la khôlleuse, elle est là pour ça ...**

Et maintenant, au travail !

1 Boîte à outils

Les polynômes de ce TP sont les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$, c'est-à-dire les polynômes de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n, \text{ avec } \forall i, a_i \in \mathbb{Z}$$

Ils seront déclarés en PASCAL de la façon suivante :

```
const long    = 250 ;
const deg_nul = -10;  {le degre du polynome nul, par convention}
type poly = array[-1..long] of integer ;
```

On convient que `P[-1]` contient le degré du polynôme P, `P[0]` contient a_0, et ainsi de suite.

Dans cette partie, on code deux procédures qui permettent l'entrée et l'impression écran des polynômes, et des procédures pour les opérations usuelles.

► Ecrire :

1. Une procédure `poly_nul(var P:poly)` qui crée un polynôme nul en annulant les coefficients de P et en notant bien que par convention, son degré est alors égal à `deg_nul`.
2. Une procédure `saisie(var P:poly)` qui permet d'entrer au clavier un polynôme (en commençant par son degré). On ne s'attachera pas à fignoler (enlever les 0, gérer les coefficients négatifs,...), sauf éventuellement si l'on est 5/2.
3. Une procédure `visu(P:poly)` qui permet la visualisation d'un polynôme sous forme étendue. Là non plus, on ne fignolera pas.
   Pour la suite du TP, vous pouvez récupérer une version plus élaborée de ces deux fonctions sur le réseau
4. Une procédure `addition(P:poly;Q:poly;var R:poly)` qui effectue l'opération $P + Q$ et stocke le résultat dans R, ce que l'on note usuellement $R \leftarrow P + Q$.
   On fera particulièrement attention au degré du polynôme somme.
5. Une procédure `scal_mul(P:poly;c:integer;var R:poly)` qui effectue l'opération $R \leftarrow c * P$, avec $c \in \mathbb{Z}$.
6. Une procédure `produit(P:poly;Q:poly;var R:poly)` qui effectue l'opération $R \leftarrow P.Q$.
7. Une procédure `puis_n(P:poly;n:integer;var R:poly)` qui effectue l'opération $R \leftarrow P^n$ à l'aide de la procédure précédente.
   On pourra choisir entre une version récursive et une version intérative.
8. Une procédure `compose(P:poly;Q:poly;var R:poly)` qui effectue l'opération $R \leftarrow P \circ Q$. Par exemple, si $P = X^2 + 3X + 5$, alors $P \circ Q = Q^2 + 3Q + 5$.

2 Polynômes cyclotomiques

Les polynômes cyclotomiques sont définis de la façon suivante :

$$\Phi_n \underset{def}{=} \prod_{k \wedge n = 1} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

On rappelle que $k \wedge n = 1$ signifie que k et n sont premiers entre eux. Par exemple, $\Phi_0 = 1$ (convention), $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = (X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1$ et $\Phi_4 = (X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Le but de cette partie est de calculer ces polynômes pour pouvoir visualiser une propriété intéressante sur les coefficients.

Vos collègues taupins établiront la relation $X^n - 1 = \prod_{k|n} \Phi_k$ d'où l'on tire :

$$\Phi_n = \frac{X^n - 1}{\Phi_{n_1} \dots \Phi_{n_k}},$$

où les n_i sont les diviseurs de n. C'est à partir de cette relation qu'en pratique on calcule les Φ_n. Par exemple, les diviseurs de 10 sont 1, 2, 5, et 10, donc $X^{10} - 1 = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_5 \Phi_{10}$ puis $\Phi_{10} = \frac{X^{10} - 1}{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_5}\cdot$ Tout se ramène donc à savoir diviser un polynôme par un autre polynôme.

► A vous de jouer ...

1. Ecrire une procédure `division_exacte(A,B:poly;var R:poly)` qui effectue la division euclidienne de A par B, avec B unitaire, sachant que $A = B.R$ (il n'y a pas de reste). On passera beaucoup de temps à l'analyse de notre façon d'opérer lorsque l'on réalise la même opération "à la main".
2. Ecrire une procédure `cyclotomic(n:integer;var C:poly)` qui permet d'obtenir le $n-$ième polynôme cyclotomique.
3. Vérifier l'absolue nécessité d'une procédure `division_exacte` itérative pour calculer `cyclo(n)` avec n grand (≥ 16 sur ma machine). Si votre version était récursive, écrire une version itérative, ou bien la prendre sur le réseau si il ne vous reste pas beaucoup de temps.
4. Regarder attentivement les coefficients de `cyclo(n)`, jusqu'à $n = 105$ inclus. *Ne me demandez pas l'origine de cette étrangeté; Mr ROUSSILLON pourra en revanche vous éclairer* ;=)