

Simulation d'expériences probabilistes (II)

Laure Danthony

<http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon/>

Généralités, Objectifs

Ce TP est une succession de petits exercices de probabilités. Chacun de ses exercices est l'occasion de coder de petits programmes PASCAL simples et ainsi de retrouver le résultat théorique. Cette fois, on ne fournit pas de squelette. On écrira cependant au tout début du TP une fonction `tirage_p(p,n:integer):boolean` qui renvoie true avec une probabilité $\frac{p}{n}$.

1 Oeufs en chocolat

La série de figurines "castor chinois" présentes dans les œufs en chocolat comporte 4 personnages différents. On note T le nombre d'œufs à acheter pour obtenir la collection complète.

► Exo :

1. Quelle est l'espérance de T ?
2. Coder une fonction `oeufs(nb_coups:integer):real` qui donne une approximation de cette espérance en réalisant `nb_coups` fois cette expérience.
3. Tester.

2 Le problème des menteurs

La personne I_1 reçoit une information 0 ou 1 et la transmet telle qu'elle avec une probabilité p à I_2 , qui fait de même avec I_3 , et ainsi de suite jusqu'à I_n qui la transmet fidèlement au monde entier.

► Exo :

1. Quelle est la probabilité p_n que le monde reçoive la bonne information ?
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.
3. Coder une fonction `menteurs(param:integer;nb_gens:integer;nb_coups:integer):real` qui réalise `nb_coups` fois la chaîne de propagation de l'information de la personne 1 à la personne n , et qui compte le nombre de fois où l'information donnée au monde entier est juste.
4. Tester et comparer à p_n .

3 Nombre de points fixes d'une permutation

On rappelle qu'une permutation de $[1, n]$ en PASCAL est un tableau des n éléments de 1 à n "dans le désordre". Il y a $n!$ possibilités pour un tel tableau. On rappelle aussi qu'un "point fixe" d'une permutation t est un indice i tel que $t[i] = i$.

► Exo :

1. Donner un procédé pour réaliser en PASCAL une telle permutation.
2. Déclarer un type `table` qui est un tableau d'entiers de taille fixée égale à `long`.
3. Coder une procédure `permutation(var t:table)` qui étant donné le tableau t , fait en sorte de le remplir d'une permutation aléatoire selon la distribution uniforme.
4. Coder une procédure `points_fixes(nb_perm:integer)` qui imprime à l'écran le nombre de permutations à 0 points fixes qui ont été tirées, puis le nombre de permutations à 1 points fixes, ...et aussi le nombre moyen de points fixes. On pourra judicieusement utiliser un tableau de stockage.
5. Tester cette dernière procédure pour `nb_perm` grand.

4 Le problème des chapeaux

Soit le problème suivant : n personnes déposent leur chapeau dans un vestiaire avant une réunion. A l'issue de celle-ci survient une panne d'électricité et chaque personne prend un chapeau au hasard.

► Exo :

1. Quelle est la probabilité pour que personne ne retrouve son chapeau ?
2. Modifier (très peu) les procédures précédentes pour faire trouver à pascal une estimation de la valeur précédente ainsi que le nombre moyen de personnes qui retrouvent leur chapeau.