

Gains maximaux d'une action

Laure Danthony

<http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon/>

D'après X MP/PC 2002

Enoncé du problème

Ce sujet est l'occasion d'appliquer les méthodes élémentaires de parcours de tableau, à un sujet concret. En effet, on cherche à calculer le gain maximum possible à la Bourse sur une action pendant une période de n jours, n étant une constante fixée à l'avance. Le cours de cette action est enregistré dans un tableau à n cases : la case $t[i]$ contient le cours de cette action au temps i .

Ce TP ne contient pas de feuille pascal d'accompagnement, et ne donne que peu d'informations sur la manière d'organiser votre travail. A vous de faire les choix que vous jugerez les plus pertinents.

1 Préliminaire

Afin de pouvoir vérifier les résultats des fonctions PASCAL plus facilement, on va écrire des tableaux exemples, qui seront de taille 100.

► Allez-y ...

- Déclarer un type `table`, de taille `long_tab` (une constante), dont les cases sont des *réels*. Ecrire rapidement une fonction d'impression de tels tableaux.
- Construire le tableau de l'action A , qui, initialement à 70 euros, a pris 1 euro les jours pairs, et a perdu 2 euros les jours impairs.
- Construire le tableau de l'action B , qui a grimpé de 120 euros à 136 euros les huit premiers jours (2 euros par jour), et qui n'a cessé de descendre de 1 euro par jour ensuite.
- Construire le tableau d'une action C , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre -20% et 20% .
- Construire le tableau d'une action D , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre -8% et 12% .
- Construire le tableau d'une action E , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre -12% et 8% .

2 Amplitude

On définit l'**amplitude** de la variation du cours comme la valeur absolue du maximum de la variation de ce cours pendant la période observée, c'est à dire la quantité suivante :

$$amplitude = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} |a_j - a_i| = \max_{1 \leq i \leq n} a_i - \min_{1 \leq i \leq n} a_i$$

► Exo :

- Ecrire une fonction `amplitude(t:tab):integer` qui retourne comme résultat l'amplitude de la variation du cours représenté par le tableau t .
- Tester votre fonction sur les tableaux exemples. Noter les résultats.
- Evaluer la complexité de votre fonction.

3 Gain maximum

Le **gain maximum** est le gain maximum possible sur la période observée, c'est-à-dire la quantité suivante :

$$gain = \text{Max}_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$$

► Exo :

- Donner un exemple (graphique) où l'amplitude est différente du gain maximum. Que représente l'amplitude en terme de gain ou de perte ?
- En suivant textuellement la définition du gain, écrire une fonction `gain(t)` qui retourne, en temps quadratique par rapport à la taille de t , le gain maximum possible sur le cours représenté par le tableau t .
- Tester votre fonction sur les tableaux exemples.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates i et j d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau t (avec $j - i$ minimum). Tester.

Enfin d'améliorer la complexité de la fonction précédente, on définit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le **gain courant maximum** `gainCouranti` comme le gain maximum possible obtenu en *en vendant son action au temps i* ¹, c'est-à-dire :

$$gainCourant_i = \text{Max}_{1 \leq k \leq i} (a_i - a_k)$$

On désire à l'aide de cette notion réécrire la fonction `gain`, mais cette fois en temps linéaire.

► Exo : ²

- En notant $k(i)$ la date d'achat optimale pour vendre au temps i , *i.e.* $t[k(i)] = \text{Min} T_1 \dots T_i$, et en distinguant les valeurs relatives de $t[i]$ et $t[k]$, exprimer le `gainCouranti` en fonction des valeurs $t[i]$ et $t[k]$. Comment remettre à jour la valeur k une fois le nouveau gain courant calculé ?
- Ecrire à l'aide de la question précédente, écrire une fonction `gain1(t)` qui retourne en temps linéaire, le gain maximum possible sur le tableau t .
- Tester cette nouvelle fonction, vérifier en particulier quelle retourne les mêmes résultats que la fonction `gain(t)` sur les tableaux exemples.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates i et j d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau t (avec $j - i$ minimum).

4 Pour aller plus loin

On considère maintenant la possibilité de faire séquentiellement deux transactions pendant la période observée, c'est-à-dire de considérer deux dates d'achat i et i' , et deux dates de vente j et j' telles que $1 \leq i \leq j \leq i' \leq j' \leq n$.

► Exo :

- Ecrire une fonction `gain2(t)` qui retourne en temps quadratique, le gain maximum possible en faisant deux transactions sur le cours de l'action représenté par le tableau t (indication : modifier la fonction `gain1` en procédure `gain1j` qui réalise la même chose, dans le sous-tableau $t[j..n]$, englober cette procédure dans une boucle sur j). Tester.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les quatre dates i, j, i' et j' d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau t . (avec $j - i$ et $j' - i'$ minimum).

¹et pas "avant le temps i !!!

²Attention cette partie est assez délicate, faire des dessins !