

## Gains maximaux d'une action

Laure Danthony

<http://www.ens-lyon.fr/~ldanthon/>

D'après X MP/PC 2002

### Enoncé du problème

Ce sujet est l'occasion d'appliquer les méthodes élémentaires de parcours de tableau, à un sujet concret. En effet, on cherche à calculer le gain maximum possible à la Bourse sur une action pendant une période de  $n$  jours,  $n$  étant une constante fixée à l'avance. Le cours de cette action est enregistré dans un tableau à  $n$  cases : la case  $t[i]$  contient le cours de cette action au temps  $i$ .

Ce TP ne contient pas de feuille pascal d'accompagnement, et ne donne que peu d'informations sur la manière d'organiser votre travail. A vous de faire les choix que vous jugerez les plus pertinents.

### 1 Préliminaire

Afin de pouvoir vérifier les résultats des fonctions PASCAL plus facilement, on va écrire des tableaux exemples, qui seront de taille 100.

► Allez-y ...

- Déclarer un type `table`, de taille `long_tab` (une constante), dont les cases sont des *réels*. Ecrire rapidement une fonction d'impression de tels tableaux.
- Construire le tableau de l'action  $A$ , qui, initialement à 70 euros, a pris 1 euro les jours pairs, et a perdu 2 euros les jours impairs.
- Construire le tableau de l'action  $B$ , qui a grimpé de 120 euros à 136 euros les huit premiers jours (2 euros par jour), et qui n'a cessé de descendre de 1 euro par jour ensuite.
- Construire le tableau d'une action  $C$ , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre  $-20\%$  et  $20\%$ .
- Construire le tableau d'une action  $D$ , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre  $-8\%$  et  $12\%$ .
- Construire le tableau d'une action  $E$ , dont le cours initial était de 100 euros, et qui chaque jour perd (ou gagne) une proportion d'elle-même comprise entre  $-12\%$  et  $8\%$ .

### 2 Amplitude

On définit l'**amplitude** de la variation du cours comme la valeur absolue du maximum de la variation de ce cours pendant la période observée, c'est à dire la quantité suivante :

$$amplitude = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} |a_j - a_i| = \max_{1 \leq i \leq n} a_i - \min_{1 \leq i \leq n} a_i$$

► Exo :

- Ecrire une fonction `amplitude(t:tab):integer` qui retourne comme résultat l'amplitude de la variation du cours représenté par le tableau  $t$ .
- Tester votre fonction sur les tableaux exemples. Noter les résultats.
- Evaluer la complexité de votre fonction.

### 3 Gain maximum

Le **gain maximum** est le gain maximum possible sur la période observée, c'est-à-dire la quantité suivante :

$$gain = \text{Max}_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$$

► Exo :

- Donner un exemple (graphique) où l'amplitude est différente du gain maximum. Que représente l'amplitude en terme de gain ou de perte ?
- En suivant textuellement la définition du gain, écrire une fonction `gain(t)` qui retourne, en temps quadratique par rapport à la taille de  $t$ , le gain maximum possible sur le cours représenté par le tableau  $t$ .
- Tester votre fonction sur les tableaux exemples.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates  $i$  et  $j$  d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau  $t$  (avec  $j - i$  minimum). Tester.

Enfin d'améliorer la complexité de la fonction précédente, on définit pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  le **gain courant maximum** `gainCouranti` comme le gain maximum possible obtenu en *en vendant son action au temps  $i$* <sup>1</sup>, c'est-à-dire :

$$gainCourant_i = \text{Max}_{1 \leq k \leq i} (a_i - a_k)$$

On désire à l'aide de cette notion réécrire la fonction `gain`, mais cette fois en temps linéaire.

► Exo : <sup>2</sup>

- En notant  $k(i)$  la date d'achat optimale pour vendre au temps  $i$ , *i.e.*  $t[k(i)] = \text{Min} T_1 \dots T_i$ , et en distinguant les valeurs relatives de  $t[i]$  et  $t[k]$ , exprimer le `gainCouranti` en fonction des valeurs  $t[i]$  et  $t[k]$ . Comment remettre à jour la valeur  $k$  une fois le nouveau gain courant calculé ?
- Ecrire à l'aide de la question précédente, écrire une fonction `gain1(t)` qui retourne en temps linéaire, le gain maximum possible sur le tableau  $t$ .
- Tester cette nouvelle fonction, vérifier en particulier quelle retourne les mêmes résultats que la fonction `gain(t)` sur les tableaux exemples.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les deux dates  $i$  et  $j$  d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau  $t$  (avec  $j - i$  minimum).

### 4 Pour aller plus loin

On considère maintenant la possibilité de faire séquentiellement deux transactions pendant la période observée, c'est-à-dire de considérer deux dates d'achat  $i$  et  $i'$ , et deux dates de vente  $j$  et  $j'$  telles que  $1 \leq i \leq j \leq i' \leq j' \leq n$ .

► Exo :

- Ecrire une fonction `gain2(t)` qui retourne en temps quadratique, le gain maximum possible en faisant deux transactions sur le cours de l'action représenté par le tableau  $t$  (indication : modifier la fonction `gain1` en procédure `gain1j` qui réalise la même chose, dans le sous-tableau  $t[j..n]$ , englober cette procédure dans une boucle sur  $j$ ). Tester.
- Modifier la fonction précédente pour aussi imprimer les quatre dates  $i, j, i'$  et  $j'$  d'achat et de vente de l'action permettant d'obtenir le gain maximum sur le tableau  $t$ . (avec  $j - i$  et  $j' - i'$  minimum).

---

<sup>1</sup>et pas "avant le temps  $i$  !!!

<sup>2</sup>Attention cette partie est assez délicate, faire des dessins !