TD d'algorithmique numéro 10
Daniel Hirschkoff et Natacha Portier
le 4 décembre 2000

Question 1 ⋆ du rab sur le coloriage ⋆

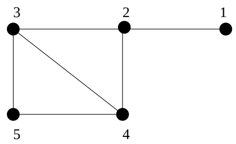
L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat surprenant suivant : le nombre moyen de K-coloriages d'un graphe de n sommets est borné par une constante indépendante de n. Commençons par quelques résultats préliminaires.

Question 1.1 Soient K nombres positifs $s_1, s_2, \ldots, s_K$ dont la somme est L. Montrer que la somme de leurs carrés vaut au moins $\frac{L^2}{K}$.

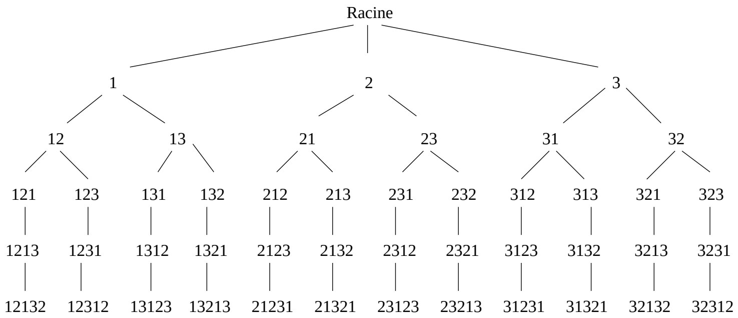
Question 1.2 Soit C une des K^L façons de colorier avec K couleurs un ensemble de L sommets virtuels. Montrer que le nombre de graphes G dont l'ensemble des sommets est cet ensemble et pour lesquels C est un coloriage correct est au plus $2^{\frac{L^2}{2}(1-\frac{1}{K})}$.

Question 1.3 Montrer que le nombre total de coloriages corrects avec K couleurs de tous les graphes de L sommets est au plus $K^L \times 2^{\frac{L^2}{2}(1-\frac{1}{K})}$.

On introduit maintenant la recherche «backtracking» pour le coloriage des graphes. On construit l'arbre de toutes les possibilités de coloriage, où l'étiquette de chaque noeud décrit les couleurs déjà affectées aux premiers sommets. Voici un exemple de graphe :



et son arbre «backtracking» de coloriage avec $K = 3$ couleurs :



Dans l'arbre, l'étiquette 212 signifie que les trois sommets 1, 2 et 3 ont été respectivement coloriés en 2, 1 et 2. Le nom de «backtracking» vient de l'algorithme de parcours : on descend tant qu'on peut dans l'arbre, et après la fin d'une exploration (couronnée de succès ou terminant par un échec) on remonte l'arbre le moins possible pour poursuivre l'exploration.

Le niveau L de l'arbre de coloriage avec K couleurs d'un graphe G (la racine est au niveau 0) représente tous les coloriages corrects en K couleurs du sous-graphe $H_L(G)$ induit par les L premiers sommets de G. Le nombre de noeuds à ce niveau est donc égal au nombre de coloriages corrects de $H_L(G)$ avec K couleurs : on note ce nombre $P(K, H_L(G))$ (P représente le polynôme chromatique, mais c'est une autre histoire).

Question 1.4 Montrer que le nombre moyen $A(n, K)$ de noeuds dans un arbre de coloriage «backtracking» pour colorier les graphes de n sommets avec K couleurs est borné par une constante $h(K)$ indépendante de n.

Question 2 $\star$ SAT-n $\star$

On appelle SAT-n le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de n occurences de la même variable.

Question 2.1 $\star$ SAT-3 $\star$

Montrer que SAT-3 n'est pas plus facile que SAT, et donc pas plus facile que SAT-n.

Question 2.2 $\star$ SAT-2 $\star$

Soit x une variable apparaissant dans la formule F de SAT-2. Trouver une formule équivalente à F et dans laquelle la variable x n'apparaisse plus.

En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

Question 3 $\star$ Variantes de 3-SAT $\star$

Montrer la NP complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. 3-SAT NAE (*not all equal*), où l'on impose que les trois variables de chaque clause ne soient pas toutes à la même valeur ;

2. 3-SAT OIT (*one in three*), où l'on impose qu'exactement une variable soit à VRAI dans chaque clause.