TD d'algorithmique numéro 11 : coloriage des graphes
Daniel Hirschkoff et Natacha Portier
lundi 11 décembre 2000

Question 1 ⋆ Coloriage avec deux couleurs ⋆

A quelle propriété des graphes équivaut la possibilité du coloriage avec deux couleurs ?

Question 2 ⋆ cinq couleurs ⋆

Une formule 3SAT est de la forme $\wedge_{k=1}^{p} C_k$ où $C_k = (v_{k,1} \vee v_{k,2} \vee v_{k,3})$ avec $v_{k,i} \in X = \{x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}\}$.

Soit le graphe $G = (X \cup \{y_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_i | 1 \leq i \leq p\}, E)$, avec

1. $(x_i, \overline{x_i}) \in E$, avec $1 \leq i \leq n$
2. $(y_i, y_j) \in E$ avec $j \neq i$, et $1 \leq i, j \leq n$
3. $(y_i, x_j), (y_i, \overline{x_j}) \in E$ avec $j \neq i$, et $1 \leq i, j \leq n$
4. $(x_i, C_j) \in E$ si et seulement si $x_i \notin C_j$
5. $(\overline{x_i}, C_j) \in E$ si et seulement si $\overline{x_i} \notin C_j$

On suppose que $n \geq 4$. Montrer qu'il faut au moins $n+1$ couleurs pour colorer le graphe. Donner la condition pour que le graphe soit $n+1$-coloriable.

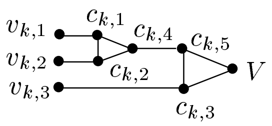
Vous pouvez appeler une des couleurs (la $n+1^{\text{e}}$) «FAUX» et les autres «VRAI», pour faire la réduction de 3SAT vers le coloriage. Montrer ensuite que le coloriage est NP en écrivant l'algorithme. Conclure à la NP-complétude.

Question 3 ⋆ trois couleurs ⋆

Maintenant on appelle les couleurs «VRAI», «FAUX» et «ROUGE». On construit à nouveau à partir d'une formule 3SAT donnée avec les notations de l'exercice précédent un graphe G comme suit : $G = (X \cup \{V, F, R\} \cup \{c_{k,i} | 1 \leq i \leq 5, 1 \leq k \leq p\}, E)$ avec

1. $(x_i, \overline{x_i}), (\overline{x_i}, R), (R, x_i) \in E$, avec $1 \leq i \leq n$ (triangles d'arêtes dites *littérales*)
2. $(R, V), (V, F), (F, R) \in E$
3. $(v_{k,i}, c_{k,i}) \in E$, avec $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq k \leq p$
4. $(c_{k,1}, c_{k,4}), (c_{k,2}, c_{k,4}), (c_{k,1}, c_{k_2}), (c_{k,4}, c_{k,5}), (c_{k,3}, c_{k,5}) \in E$ avec $1 \leq k \leq p$
5. $(c_{k,3}, V), (c_{k,5}, V) \in E$ avec $1 \leq k \leq p$

Les trois dernièrs types d'arêtes sont appelés arêtes *de clause*. Le sommet V est colorié avec «VRAI», le sommet F avec «FAUX» et le sommet R avec «ROUGE».



Montrer que les x_i et $\overline{x_i}$ sont forcément l'un de couleur «VRAI» et l'autre de couleur «FAUX» et que pour n'importe quelle assignation de vérité pour la formule à partir de laquelle on a construit un graphe il est possible de colorier ce dernier (restreint aux arêtes littérales) avec trois couleurs.

Montrer maintenant que chaque sous-graphe correspondant à une clause est coloriable avec les trois couleurs si et seulement si au moins un sommet parmi les $v_{k,i}$ est colorié en «VRAI».

Conclure la preuve de NP-complétude.

Montrer que le problème pour 4 couleurs est NP-complet.

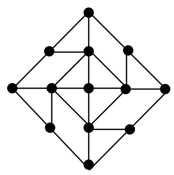
Question 4 ⋆ graphes planaires ⋆

Un graphe est dit *planaire* si quand on le «dessine» il n'y a pas de «croisement» entre deux arêtes. Le seul cas intéressant est le coloriage avec trois couleurs. Pour quatre ou plus un théorème connu dit que c'est toujours possible et pour moins de trois rien n'est changé.

Le but est de prouver l'équivalence avec le coloriage avec trois couleurs d'un graphe quelconque, en réduisant celui-ci au premier.

Question 4,1

Soit le sous-graphe suivant :



Montrer qu'il est coloriable avec trois couleurs si et seulement si les sommets extrêmaux opposés ont la même couleur.

Question 4,2

Conclure.