none

TD d'algorithmique numéro 9 (partiel 99)
Daniel Hirschkoff et Natacha Portier
lundi 27 novembre 2000

Partie A: Coloriages

On s'intéresse à quelques algorithmes simples pour colorier les sommets d'un graphe. Règle du jeu: deux sommets adjacents ne doivent pas recevoir la même couleur.

2-coloriage

Les graphes 2-coloriables (qu'on peut colorier avec 2 couleurs) sont les graphes bipartis: $G = (V, E)$ est biparti s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles B (bleu) et R (rouge) tels que toute arête de E relie un sommet bleu et un sommet rouge.

(A1) Proposer un algorithme pour vérifier si un graphe est 2-coloriable.

(A2) Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.

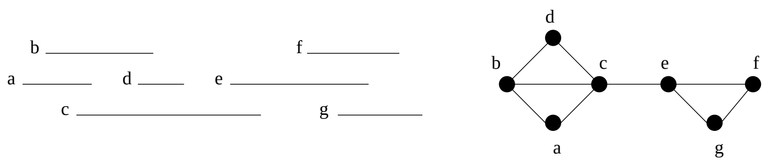
Heuristiques gloutonnes

Le cas des graphes 2-coloriables est réglé. Hélas, le problème de n-coloriabilité est NP-complet pour $n \geq 3$, ce qui motive l'étude de quelques heuristiques de coloriage. Désormais, les couleurs sont représentées par des entiers $1, 2, \ldots, K, \ldots$ Le degré $\delta(v)$ d'un sommet v est le nombre de ses voisins, et le degré $\Delta(G)$ d'un graphe G est le maximum des degrés de ses sommets.

(A3) Etant donné un ordre arbitraire $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des sommets de $G = (V, E)$, l'algorithme glouton colorie les sommets dans cet ordre en attribuant à chaque sommet la plus petite couleur disponible (non déjà utilisée pour les voisins). Montrer que le nombre de couleurs utilisées $gl(G)$ vérifie $gl(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(A4) On pose $d_i = \delta(v_i)$. Montrer qu'on a $gl(G) \leq \max_{i=1}^{n} \min(d_i + 1, i)$. Quelle manière d'énumérer préalablement les sommets du graphe cette borne affinée suggère-t-elle?

Nous allons voir que l'algorithme glouton est optimal pour les graphes d'intervalles. Etant donnée une famille d'intervalles (disons sur la droite réelle), on définit un graphe dont les sommets sont les intervalles, et dont les arêtes relient les sommets représentant les intervalles qui s'intersectent. Voici un exemple:



(A5) Montrer que l'algorithme glouton colorie le graphe de manière optimale si l'on énumère les s ommets d'un graphe d'intervalles G selon l'ordre donné par les extrémités gauches des intervalles, à savoir a, b, c, d, e, f, g sur l'exemple.

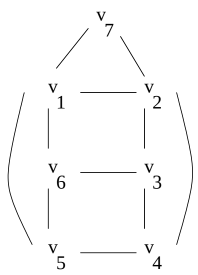
Algorithme de Brelaz

Voici une dernière variante intéressante de l'algorithme glouton. On définit le degré-couleur d'un sommet comme le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorier ses voisins (attention, ce n'est pas le nombre de voisins déjà coloriés, car certains peuvent avoir reçu la même couleur). Initialement, le degré-couleur de chaque sommet est nul, puis celui-ci évolue au cours de l'algorithme, jusqu'à ce que le sommet soit finalement colorié. Plus précisément, voici l'algorithme de Brelaz:

Initialisation. Trier les sommets par degrés décroissants. Choisir un sommet de degré maximal et lui attribuer la couleur 1.

Régime permanent. Tant qu'il reste des sommets non coloriés, choisir un sommet non-colorié de degré-couleur maximal (en cas d'égalité, prendre parmi ceux-ci un sommet de degré maximal), et le colorier avec la plus petite couleur admissible.

(A6) Faire tourner l'algorithme précédent sur l'exemple ci-dessous:



(A7) Montrer que cet algorithme n'utilise que deux couleurs pour colorier les graphes bipartis.

Partie B: Périmètres

Soit un polygone dont la suite des longueurs des côtés est $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

(B1) Déterminer en un temps linéaire deux indices i, j qui minimisent la valeur absolue de la différence entre les deux portions de périmètre qu'ils déterminent, i.e., qui minimisent (sommations modulo n)

$$|(\sum_{i}^{j-1} a_l) - (\sum_{j}^{i-1} a_l)| \ .$$

On pourra commencer par donner une solution de coût quadratique $O(n^2)$.

(B2) Déterminer en un temps linéaire trois indices i, j, k qui minimisent la différence entre le plus grand «tiers» et le plus petit «tiers» qu'ils déterminent, i.e., qui minimisent (sommations modulo n)

$$\max(\sum_{i}^{j-1} a_l, \sum_{j}^{k-1} a_l, \sum_{k}^{i-1} a_l) - \min(\sum_{i}^{j-1} a_l, \sum_{j}^{k-1} a_l, \sum_{k}^{i-1} a_l) \ .$$

Attention: cette dernière question est difficile!