Une caractérisation des mots de Gauss réalisables

Laure Danthony

Pour le 12 décembre 2000

L'article présenté introduit la notion de mot de Gauss réalisable et propose en deux étapes un algorithme polynômial pour le résoudre.

Un n-mot de Gauss est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît exactement 2 fois. On dit qu'un n-mot de Gauss est réalisable s'il existe un n-diagramme de Gauss correspondant, c'est-à-dire une courbe plane fermée à n point doubles étiquetée par les lettres du mot telle que, en la parcourant, à partir d'un point et dans un certain sens, on lise le mot de Gauss considéré :

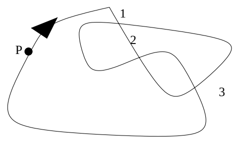

FIG. 1: *Le diagramme de* 123123

Le problème qui se pose est donc la caractérisation de la réalisabilité d'un mot de Gauss donné. Le premier résultat présenté est le suivant : une condition nécessaire de réalisabilité d'un mot de Gauss est son caractère impair, c'est-à-dire que la taille de tous les mots $Loop_i(A)$ (le sous-mot de A situé entre les deux occurences de la lettre i) est impaire.

La section suivante donne la description d'un jeu sur les mots qui donne une condition nécessaire et suffisante de réalisabilité pour les mots de Gauss. Il s'agit d'un jeu à k joueurs, à partir d'un mot A de Gauss, qui peut "réussir" ou pas. Si il existe un jeu sur le mot A qui réussit, on qualifie le mot A de mot à k-joueurs. On a alors le résultat suivant : un mot de Gauss impair A est réalisable si et seulement si le mot $Switch(A)$ (un mot obtenu facilement à partir des mots $Loop_i(A)$) est un mot à 2 joueurs.

Le dernier paragraphe décrit une caractérisation des mots à 2-joueurs, et par là-même une caractérisation des mots de Gauss réalisables. On construit facilement à partir de A un ensemble S de relations dont on peut vérifier facilement la consistance (i.e., si cet ensemble ne possède pas de contradiction). De plus, on a le résultat suivant : un mot de Gauss est un mot à 2-joueurs si et seulement si l'ensemble associé est consistant.

En conclusion, on peut construire à partir d'un mot A de Gauss son mot associé $Switch(A)$ et l'on applique l'algorithme précédent pour déterminer si $Switch(A)$ est un mot à 2-joueurs. Ce qui est intéressant, c'est que l'algorithme ainsi décrit est en temps polynômial (plus précisément, le temps de calcul est proportionnel à n^5 où n est le nombre de lettres différentes du mot A).