Exercice 1 : Majoration des racines d'un polynôme

Solution :

1. $x > 0$ est une racine de Q si et seulement si
$$1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \frac{|a_{n-2}|}{x^2} - \ldots - \frac{|a_0|}{x^n} = 0.$$
Le premier membre est une fonction strictement croissante de x, qui, quand x croît de 0 à $+\infty$, croît de $-\infty$ à 1, et s'annule donc pour une unique valeur $r \in \mathbb{R}^+$.

2. Si x_0 est une racine de P on a
$$\frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \frac{|a_{n-2}|}{|x^2|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|x^n|} \geq$$
$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right| = 1 = \frac{|a_{n-1}|}{r} + \frac{|a_{n-2}|}{r^2} + \ldots + \frac{|a_0|}{r^n}.$$
Le premier terme étant une fonction décroissante de $|x|$, on en déduit $|x| \leq r$.

3. Puisque r est le plus grand réel positif pour lequel $Q(r) < 0$, il suffit de montrer que $Q(A+1) \geq 0$. Or
$$\begin{aligned} Q(A+1) &= (A+1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|(A+1)^k \\ &\geq (A+1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} A(A+1)^k \\ &= (A+1)^n - A\frac{(A+1)^n - 1}{A+1-1} = 1. \end{aligned}$$

□

Exercice 2 : La méthode de Hensel

Solution : Montrons l'existence et l'unicité par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Suppsons le résultat vérifié pour n, et cherchons x_{n+1}. Puisque $f(x_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ on a, a fortiori, $f(x_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^n}$, et, par l'unicité de x_n modulo p^n, le nombre x_{n+1} est de la forme $x_{n+1} = x_n + p^n u$, $u \in \mathbb{Z}$. La formule de Taylor donne
$$f(x_{n+1}) = f(x_n + p^n u) = f(x_n) + p^n u f'(x_0) + \ldots \equiv f(x_n) + p^n u f'(x_n) \pmod{p^{n+1}}.$$

En écrivant $f(x_n) = p^n z$ on est ramené à l'équation

$$p^n z + p^n u f'(x_n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}} \tag{1}$$

qui se simplifie, en divisant par p^n, en l'équation

$$z + u f'(x_n) \equiv 0 \pmod{p}$$

ou encore (car $x_n \equiv x_o \pmod{p}$)

$$z + u f'(x_0) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Comme $f'(x_0)$ est non nul modulo p, cette congruence admet une unique solution u modulo p, et x_{n+1} est uniquement déterminé modulo p^{n+1} par léquation

$$x_{n+1} = x_n + u p^n.$$

□