1 La méthode de Horowitz

Exercice 1 : En utilisant la méthode de Horowitz, vue en cours, écrire la fonction

> `horowitz(f,x)`

qui reçoit une fraction rationelle f sans partie entière, et rend une primitive de f sous la forme

$$\int f(x)\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx.$$

avec $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}[x]$, et $(Q_2, Q_2') = 1$. On utilisera l'opérateur `Int` pour laisser sous forme non évaluée la deuxième intégrale (celle qui conduit à un logarithme). Plutôt que de programmer explicitement le système linéaire qui donne les coefficients de P_1 et P_2, vous pourrez utiliser la fonction `solve(identity(...))`.

2 La méthode de Hermite

Dans cette partie on se propose de refaire le même calcul (beaucoup plus laborieusement) par la méthode naïve usuelle.

Exercice 2 : Écrire la fonction

> `yun(P,x)`

qui reçoit le polynôme $P(x)$ et rend la factorisation $P = P_1 P_2^2 \dots P_r^r$ où les P_i sont deux a deux premiers entre eux.

Exercice 3 : En utilisant la fonction Maple `gcdex`, écrire la fonction

> `dec2(A,B,C,x)`

qui reçit trois polynômes de $\mathbb{Q}[x]$ tels que $(B, C) = 1$, $\deg(A) < \deg(B) + \deg(C)$, et rend le second membre de la décomposition

$$\frac{A}{BC} = \frac{A_1}{B} + \frac{A_2}{C} \qquad \deg(A_1) < \deg(B), \quad \deg(A_2) < \deg(C).$$

Exercice 4 : Ecrire la fonction

> `sans_facteurs_carres(f,x)`

qui reçoit une fraction rationelle f de $\mathbb{Q}(x)$ et rend sa décomposition en somme de fractions de la forme $\dfrac{A}{R_i^j}$ les polynômes R_i étant sans racines multiples et deux à deux premiers entre eux.

Exercice 5 : Ecrire la fonction

> `intsfc(A,r,i,x)`

qui reçoit une fraction rationelle f sous la forme $\dfrac{A}{R^i}$, avec r sans racines multiples, et rend la somme de la partie rationelle et de la partie logarithmique non intégrée de $\int f$ (comme R n'a pas de racines multiples on écrira $uR + vR' = 1$ et $A = AuR + AvR'$).

Exercice 6 : Ecrire enfin la fonction

```
> hermite(f,x)
```

qui reçoit une fraction rationelle f en x et, (comme la fonction `horowitz` du premier exercice), rend la somme de la partie rationelle et de la partie logarithmique non intégrée de $\int f$.

3 Intégration de la partie logarithmique

Exercice 7 : Ecrire la fonction

```
> intlog(f,x)
```

qui reçoit une fraction $\frac{P}{Q}$ avec $\deg P < \deg Q$, Q sans racines multiples, et rend sa primitive sous forme du logarithme d'une fraction rationelle de $\mathbb{K}(x)$, où $\mathbb{K}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré au plus 2, chaque fois qu'une telle primitive existe.

Exercice 8 : Quand $f = P/Q$ est une fraction rationelle réelle, tout facteur irréductible de degré 2 du resultant R de $P - yQ'$ fait apparaitre dans l'expression de la primitive de f deux termes conjugués de la forme $c \log A(x) + iB(x)$, avec $c \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}[x]$. Ecrire une procédure

```
> log2arctan := proc(e,x)
```

qui reçoit une expression de la forme $c \log(A(x) + iB(x))$ et la transforme en une combinaison de $\log(A^2 + B^2)$ et de $\arctan(\frac{A(x)}{B(x)})$.

Exercice 9 : Ecrire finalement la procédure

```
> intfrac := proc(f,x)
```

qui essaie de calculer une primitive de la fraction rationelle $f(x)$.

4 Application

Calculer les primitives de

$$f(x) = \frac{4x^7 + 13x^6 - 2x^5 - 162x^4 - 342x^3 - 209x^2 + 294x + 176}{(x^4 - 5x^2 - 14x - 6)^2}$$

et

$$g(x) = \frac{x^6 + 2\,x^5 - 5\,x^4 - 16\,x^3 - 14\,x^2 - 4\,x + 1}{x^8 + 4\,x^7 + 6\,x^6 + 4x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1}$$