Décidabilité : TD 1, Codage sur $\mathbb{N}$

27 Septembre 2000

Exercice 1

Quand il y en a pour un, il y en a pour deux...

Sur $\mathbb{N}^2$, on considère l'ordre $<$ défini par

$$\left[\begin{array}{l} (a,b) < (c,d) \text{ ssi} \\ \qquad\qquad \left\{\begin{array}{lll} a+b < c+d & \text{ou} & \\ a+b = c+d & \text{et} & a < c \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer qu'il existe un unique isomorphisme χ de $(\mathbb{N}^2, <)$ sur $(N, <)$ et qu'il s'exprime par un polynôme.

On note (Π_1, Π_2) la bijection réciproque de χ. Montrer que $\Pi_i(x) \leq x$. Etudier les cas d'égalité.

Exercice 2

...et même pour beaucoup plus !

On définit par induction sur $p \geq 2$ des fonctions $\chi_p : \mathbb{N}^p \mapsto \mathbb{N}$

$$\left[\begin{array}{l} \chi_2 = \chi \\ \chi_{p+1}(x_1, ..., x_{p+1}) = \chi_2(\chi_p(x1, ..., x_p), x_{p+1}) \end{array}\right.$$

On note $seq(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites finies d'entiers, λ la suite vide. On définit une fonction $\sigma : Seq(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{N}$:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma(\lambda) = 0 \\ \sigma(< x >) = \chi_2(0, x) + 1 \\ \sigma(< x_1, ..., x_p >= \chi_2(p-1, \chi_p(x_1, ..., x_p)) + 1 \text{ si } p \geq 2 \end{array}\right.$$

Montrer que σ est une bijection de $Seq(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$ et que $\sigma(x_1, ..., x_p)$ s'exprime par un polynome de degré p.

Exercice 3

Quelques formules LaTeX

a/ Soit $l \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{j=1}^{j \leq X} \prod_{i=0}^{i \leq l} (j+l) = \frac{\prod_{i=0}^{i \leq l+1} (X+i)}{l+2}$$

b/ Soit $p \geq 2$. On note $N(p, S)$ le nombre de p-uplets $(x_1, ..., x_p)$ tels que $x_1 + ... + x_p = S$

Montrer que $N(p, S) = C_{s+p-1}^{p-1}$

en déduire que

$$\sum_{i=0}^{S-1} N(p, i) = \frac{\prod_{i=0}^{i<p} (S+i)}{p!}$$

Exercice 4

Être bien ordonné n'est pas chose simple...

Par induction sur $p \geq 2$, on définit des relations d'ordre $<_p$ sur $\mathbb{N}^p$:

$$\left[\begin{array}{l} <_2 \text{ est } < \text{ défini dans l'exercice 1} \\ (x_1, ..., x_{p+1} <_{p+1} (y_1, ..., y_{p+1}) \text{ si et seulement si} \\ \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 + ... + x_{p+1} < y_1 + ... + y_{p+1} \text{ ou} \\ x_1 + ... + x_{p+1} < y_1 + ... + y_{p+1} \text{ et } (x_1, ..., x_p <_p (y_1, ..., y_p) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer que $(\mathbb{N}^p, <_p)$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, <)$ et que l'unique isomorphisme L_p s'exprime par un polynome de degré p.

Exercice 5

Le degré de la despé est de 6.

Soit P un polynome de degré q, à p variables et à coefficients réels. Montrer que si P établit une bijection de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$, alors $q \geq p$.

Exercice 6

a/ Vérifier que la fonction

$$(i, j) \mapsto 2^i(2j + 1) - 1$$

établit une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$

b/ On définit une fonction $L : Seq(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{N}$:

$$\left[\begin{array}{l} L(\lambda) = 0 \\ L(< x_1, ..., x_p >) = 2^{p-1}(2L_p(x_1, ..., x_p) + 1) \text{ si } p \geq 1 \end{array}\right.$$

Montrer que L est une bijection et que L s'exprime par un polynôme.

Exercice 7

Montrer les inégalités suivantes :

$$L_p(< x_1, ..., x_p >) \leq \frac{1}{2}(5M)^p$$

$$L(< x_1, ..., x_p >) \leq \frac{3}{5}(10M)^p$$

où $M = Sup(x_1, ..., x_p)$

Rappel : Formule de Stirling

$$e^{-\frac{1}{12}n} \geq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \leq e^{\frac{1}{12}n}$$

Exercice 8

On note $\Pi_{p,1}, ..., \Pi_{p,p}$ la bijection réciproque de L_p

Montrer que $\Pi_{p,i}(x) \leq x \ \forall i \in \{1, ..., p\}$.

En quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 9

N'oublions pas Turing

Construisez les machines de Turing suivantes :

M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.

M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.

M à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.

M à deux rubans sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui code en binaire son entrée unaire.