

# Décidabilité : TD 2, Fonctions Récursives Primitives

11 Octobre 2000

## Exercice 1

*Fonctions sur  $\mathbb{N}$*

Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives :

$$\begin{array}{ll}
 (x \in \mathbb{N})C_x & : y \mapsto x \\
 + & : (x, y) \mapsto x + y \\
 \times & : (x, y) \mapsto xy \\
 exp & : (x, y) \mapsto x^y \\
 ! & : x \mapsto x!
 \end{array}$$

## Exercice 2

*FRP*

$FRP^{(q)}$  désigne l'ensemble des fonctions récursives primitives à  $q$  arguments sur  $\mathbb{N}$ . Montrer que les fonctions récursives primitives sont stables par les fonctionnelles suivantes :

- $It^{(p)} : FRP^{(p+1)} \mapsto FRP^{(p+2)}$   
 Si  $\Theta \in FRP^{(p+1)}$  alors  $It^{(p)}(\Theta)(t_1, \dots, t_p, x, 0) = x$  et  
 $It^{(p)}(\Theta)(t_1, \dots, t_p, x, y + 1) = \Theta(t_1, \dots, t_p, It^{(p)}(\Theta)(t_1, \dots, t_p, x, y))$
- $\Sigma^{(p)} : FRP^{(p+1)} \mapsto FRP^{(p+1)}$   
 $\Theta \in FRP^{(p+1)}$  alors  $\Sigma^{(p)}(\Theta)(t_1, \dots, t_p, 0) = 0$  et  
 $\Sigma^{(p)}(\Theta)(t_1, \dots, t_p, y + 1) = \sum_{i=0}^{y} \Theta(t_1, \dots, t_p, i)$
- idem pour  $\Pi^{(p)}$
- idem pour  $Max^{(p)}$  et  $Min^{(p)}$  (à définir)

## Exercice 3

*Fonction d'Ackerman*

On définit une fonction  $A$  de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  par :

$$\left[ \begin{array}{ll}
 A(0, x) & = x + 1 \\
 A(p, 0) & = p + 1 \\
 A(p + 1, x + 1) & = A(p, A(p + 1, x))
 \end{array} \right.$$

- Donner des expressions explicites de  $A(1, x)$ ,  $A(2, x)$ ,  $A(3, x)$  et  $A(4, x)$ .
- Quelle serait la forme générale de  $A(5, x)$  ?
- Montrer que  $A$  est strictement croissante en chacune de ses variables.
- Montrer que  $A(p, x + 1) < A(p + 1, x)$  pour  $x > 0$
- Existe-t-il  $q$  pour tout  $p$  tel que  $A(p, 1) < A(q, 0)$

## Exercice 4

*Non récursive primitive*

Montrer que pour toute fonction récursive primitive  $f(t_1, \dots, t_k)$  il existe un entier  $p$  tel que :

$$f(t_1, \dots, t_k) < A(p, \text{Sup}(t_1, \dots, t_k))$$

En déduire que  $A$  n'est pas récursive primitive.

$A$  est-elle récursive ?