Décidabilité : TD 4, Fonctions Récursives Primitives II

11 Octobre 2000

Finir d'abord la feuille d'exercices précédente.

Exercice 1 *stabilité de FRP*

$FRP^{(q)}$ (resp $PRP^{(q)}$) désigne l'ensemble des fonctions (relations) récursives primitives à q arguments sur $\mathbb{N}$. Montrer que les fonctions récursives primitives sont stables par les fonctionnelles suivantes :

- Le Shéma μ borné

  Sch μ : $PRP^{(p+1)} \mapsto FRP^{(p+1)}$

  Sch $\mu(P)(t_1, ..., t_p, x)$ est le plus petit entier y tel que $y \leq x$ et que $Pt_1, ..., t_p, x)$. (0 si y n'existe pas)

- Le Shéma μ borné*

  Sch μ^* : $PRP^{(p+1)} \times FRP^{(p)} \mapsto FRP^{(p+1)}$

  Sch $\mu^*(P, f)(t_1, ..., t_p, x)$ est le plus petit entier y tel que $y \leq f(t_1, ..., t_p)$ et que $Pt_1, ..., t_p, x)$. (0 si y n'existe pas)

Exercice 2 *Encore quelques fonctions récursives*

Montrer que les fonctions suivantes sont r.p.

ppcm, quotient entier, reste de la division euclidienne, pgcd, tout polynome sur $\mathbb{Q}$ à image dans $\mathbb{N}$...

Exercice 3 *Fonctions élémentaires sur $\mathbb{N}$*

On appelle fonctions élémentaires, les fonctions obtenues à partir de l'unique fonction de base 1 (à 1 arguments) en utilisant un nombre fini de fois des additions, des multiplications, des différences ($|m - n|$), des quotients **entiers**, des Σ^p et des Π^p.

On note FE^* l'ensemble des fonctions élémentaires.

- Montrer que les fonctions suivantes sont élémentaires :
  - $min(m, n)$ (le plus petit entier)
  - $sg(n)$ égal à 0 si $n = 0$, 1 sinon.
  - $m \div n$ division euclidienne
  - le reste de la division
  - m^n
- Montrer que g définie par $g(0, m) = 0$ et $g(n+1, m) = n^{g(n,m)}$ est récursive primitive.
- Montrer que

- $g(n+1, m+1) \geq g(n+1, m)$
- $g(a, m) \geq g(n_1, m) + g(n_2, m)$ avec $a = max\{n_1, n_2\} + 1$
- $g(a, m) \geq g(n_1, m) \times g(n_2, m)$ avec $a = max\{n_1, n_2\} + 1$
- $g(a, m) \geq g(n_1, m)^{g(n_2, m)}$ avec $a = max\{n_1, n_2\} + 1$
- $g(b, m) \geq g(n_1, g(n_2, m))$ avec $b = n_2 + 2n_1$

• Montrer que pour toute fonction élémentaire f, il existe un entier a_f tel que :

$$f(x_1, ..., x_k) < g(a_f, max(x_1, ..., x_k))$$

En déduire que $FE^{(*)} \neq FRP^{(*)}$