

# TD 6

8 Novembre 2000

## Exercice 1

L'ensemble  $W_n$  désigne le domaine de la machine de Turing  $\phi_n$ .

Montrer qu'il existe des fonctions récursives totales  $f, g$  et  $h$  telles que

1.  $W_{f(x)} = \{x\}$
2.  $W_{g(x,y)} = W_x \cap W_y$
3.  $W_{h(x,y)} = W_x \cup W_y$

## Exercice 2

Soit  $\phi_i$  l'énumération usuelle des machines de Turing. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale  $f$  telle que  $\forall x \in \mathbb{N}, \text{Image}(\phi_x) = \text{Domaine}(\phi_{f(x)})$ .

## Exercice 3

Montrer que, pour tout système de programmation  $\phi_n$ , il existe  $n$  tel que  $\phi_n$  et  $\phi_{n+1}$  calculent la même fonction. Pour tout système de programmation, existe-t'il  $n$  tel que  $\phi_n, \phi_{n+1}, \phi_{n+2}$  calculent la même fonction?

## Exercice 4

Pour chacune des conditions suivantes, trouver un entier  $m$  la vérifiant :

- $W_m = \{m^2\}$
- $W_m = \mathbb{N} \setminus \{m\}$
- $W_m = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi_m(x) \text{ diverge}\}$
- 

## Exercice 5

Existe-t-il  $m \in \mathbb{N}$  vérifiant  $\text{Dom}(\phi_m) = K$  et  $m \in K$  ?

Vérifiant  $\text{Dom}(\phi_m) = K$  et  $m \notin K$  ?

## Exercice 6

Soit  $f$  une fonction partielle, partiellement récursive. Construire  $g$  recursive totale telle que pour tout  $y$ ,

$$\varphi_{g(y)} = \varphi_{f(\langle y, g(y) \rangle)}$$

## Exercice 7

Soit  $\theta$  une fonction récursive totale de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_{\theta(i)}$  soit totale. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui n'est aucune des  $\phi_{\theta(i)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

L'ensemble  $\{i : \phi_i \text{ est totale}\}$  est-il récursif ? récursivement énumérable ?

## Cours

Une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  est dite "immune" ssi  $A$  est infini et pour tout ensemble infini, récursivement énumérable  $B$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Montrer qu'il existe un nombre indénombrable d'ensembles  $A$  tels que  $A$  et son complémentaire soient tous les deux immunes.