TD 7

15 Novembre 2000

Théorème de Rice généralisé

Dans tout l'énoncé, $\phi_x(x \in \mathbb{N})$, désigne l'énumération habituelle des machines de Turing.

Soit $\mathbb{F}^k$ l'ensemble des fonctions calculables définies sur une partie de $\mathbb{N}^k$. On note $\mathbb{F}^* = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{F}^k$.

A toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{F}^*$, on associe

$$P_\mathcal{C} = \{x \mid \phi_x \text{ calcule une fonction de } \mathcal{C}\}.$$

Enfin σ est la bijection usuelle de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des suites finies d'entiers.

Partie I

a - Soit $K = \{x \mid \phi_x(x) \text{ s'arrête}\}$ et $\overline{K}$ son complémentaire. Montrer que K et $\overline{K}$ ne sont pas récursifs.

b - Soit η la fonction définie par

$$\begin{cases} \eta(x,y,z) = 1 & \text{si le calcul de } \phi_x \text{ sur l'entrée } y \text{ s'arrête} \\ & \text{en au plus } z \text{ étapes} \\ \eta(x,y,z) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que η est récursive totale.

c - Soit ψ une fonction récursive, montrer qu'il existe une fonction récursive totale g telle que

$$\forall x, y \quad \phi_{g(x)}(y) = \begin{cases} \psi(y) & \text{si } \forall z \leq y,\ \eta(x,x,z) = 0 \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

d - Soit f une fonction de $\mathbb{F}^k$, $\tilde{f}$ est une sous-fonction finie de f si $\tilde{f}$ a un domaine fini et est la restriction de f sur ce domaine. Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^*$ tel que $P_\mathcal{C}$ soit récursivement énumérable et soit $\psi \in \mathcal{C}$. Montrer que si aucune sous-fonction finie de ψ n'appartient à $\mathcal{C}$ alors il existe un i tel que $\overline{K} = \{x \mid (\phi_i \circ g)(x) \text{ s'arrête}\}$.

e - En déduire que si $P_\mathcal{C}$ est récursivement énumérable, alors pour toute fonction θ de $\mathcal{C}$, il existe une sous-fonction finie de θ qui est aussi dans $\mathcal{C}$.

Partie II

Soit ψ une fonction de $\mathbb{F}^k$, χ étend ψ si ψ est la restriction de χ au domaine de ψ. Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^*$ tel que $P_{\mathcal{C}}$ soit récursivement énumérable.

a - Soient χ et ψ deux fonctions calculables, χ étendant ψ. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale h telle que

$$\forall x, y \quad \phi_{h(x)}(y) = \begin{cases} \chi(y) & \text{si } x \in K \\ \psi(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

b - Soit $\chi \notin \mathcal{C}$ étendant $\psi \in \mathcal{C}$, montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\overline{K} = \{x \mid (\phi_i \circ h)(x) \text{ s'arrête}\}.$$

c - En déduire que si $P_{\mathcal{C}}$ est récursivement énumérable, alors toute fonction calculable étendant une fonction dans $\mathcal{C}$ est aussi dans $\mathcal{C}$.

Partie III

Soit y un entier tel que $\sigma(y) = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$, la fonction *germe* engendrée par y (le germe), notée $f_y^\star$, est définie par $f_y^\star(x_1, \ldots, x_k) = x_{k+1}$. La fonction $f_y^\star$ est indéfinie partout ailleurs.

a - Soit A un ensemble récursivement énumérable, $\mathcal{C}_A$ est la classe des fonctions qui étendent une fonction germe engendrée par un élément de A.
Montrer que $x \in P_{\mathcal{C}_A}$ si et seulement si il existe un élément y de A tel que $\sigma(y) = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ et $\phi_x(x_1, \ldots, x_k) = x_{k+1}$.
En déduire que $P_{\mathcal{C}_A}$ est récursivement énumérable.

b - On suppose maintenant que $P_{\mathcal{C}}$ est récursivement énumérable. Montrer que l'ensemble suivant est récursivement énumérable :

$$B = \{y \mid \exists x \in P_{\mathcal{C}},\ \phi_x(x_1, \ldots, x_k) = x_{k+1} \text{ et } \sigma(y) = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\}.$$

Montrer que $P_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}_B}$.

c - En déduire que $P_{\mathcal{C}}$ est récursivement énumérable si et seulement si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions étendant les fonctions germes d'un ensemble récursivement énumérable.

Partie IV

a - Soit $\mathcal{C} = \{f \in \mathbb{F}^*,\ f \text{ est totale}\}$. Montrer que $P_{\mathcal{C}}$ et $\overline{P_{\mathcal{C}}}$ ne sont pas récursivement énumérables.

b - L'ensemble $\{x \mid \text{ le domaine de } \phi_x \text{ est infini}\}$ est-il récursivement énumérable ?