TD 9

6 Décembre 2000

Pour un préordre $\leq_r$ que l'on appelle réduction, on dit que $A \equiv_r B$ si $A \leq_r B$ et $B \leq_r A$; et que A est $\leq_r$-complet si A est récursivement énumerable et pour tout B récursivement énumérable, $B \leq_r A$.

Nous allons étudier différentes réductions et les comparer.

On dit que A est réductible un-un à B (on note $A \leq_1 B$) s'il existe une fonction récursive totale f injective vérifiant $\forall x \in \mathbb{N}\ x \in A \iff f(x) \in B$.

On dit que A est m-réductible à B (on note $A \leq_m B$) s'il existe une fonction récursive totale f vérifiant $\forall x \in \mathbb{N}\ x \in A \iff f(x) \in B$.

Exercice 1

Montrer que :

1. $\leq_1$ et $\leq_m$ sont réflexive et transitive ;
2. $A \leq_1 B \Rightarrow A \leq_m B$;
3. $A \leq_1 B \Rightarrow \overline{A} \leq_1 \overline{B}$;
4. $A \leq_m B$ et B récursif $\Rightarrow A$ récursif ;
5. $A \leq_m B$ et B récursivement énumérable $\Rightarrow A$ récursivement énumérable.

Exercice 2

Montrer que $K_0 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in Dom(\phi_y)\}$, $K = \{x \mid x \in Dom(\phi_x)\}$ sont $\leq_1$-complets et isomorphes.

Exercice 3

Soit A et B deux ensembles infinis tels que A et B diffèrent seulement d'un ensemble fini, c'est–à–dire vérifiant $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ de cardinal fini. Montrer alors $A \equiv_m B$.

Exercice 4

1. Montrer que si $A \leq_m \overline{A}$ et A récursivement énumérable, alors A est récursif.
2. Trouver A non récursif vérifiant $A \leq_m \overline{A}$.

Exercice 5

Soit A et B récursivement énumérables. Montrer :

1. si $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \leq_m A \cap B$;
2. si $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B$ infini alors $A \leq_1 A \cap B$.

Exercice 6

Comparer, pour $\leq_m$, les ensembles suivants :

1. $\{x \mid x \text{ premier}\}$;
2. $\{x \mid x \text{ impair}\}$;
3. $\{x \mid Dom(\phi_x) = \emptyset\}$;
4. $\{x \mid Dom(\phi_x) \text{ infini}\}$;
5. $\{x \mid \phi_x \text{ totale}\}$.

Exercice 7

Montrer que tout m-degré (classe d'équivalence pour $\equiv_m$) est au plus dénombrable. Existe-t-il des m-degrés finis ? Montrer que pour tout m-degré, l'ensemble des degrés qui sont inférieurs est au plus dénombrable. Mêmes questions avec les 1-degrés.