Décidabilité : TD 10, logique mathématique

13 Décembre 2000

Notations

On utilisera les lettres caligraphiées $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ pour les structures et les lettres droites M, N pour les ensembles sous-jacents à ces structures.

Préliminaires

La méthode des diagrammes

Soit $\mathcal{M}$ une L-structure ; on considère le langage $L_{\mathcal{M}}$ obtenu en ajoutant à L un symbole de constante $\underline{a}$ pour chaque élément $a \in M$. Alors $\mathcal{M}$ s'enrichit naturellement en une L_M-structure que l'on notera $\mathcal{M}^*$: il suffit d'interpréter $\underline{a}$ par a. Posons :

$$D(\mathcal{M}) = \{F[\underline{a_1}, \underline{a_2}, ..., \underline{a_n}]; F[\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}] \text{ est une formule de L, } a_1, a_2, ..., a_n \in M \text{ et } \mathcal{M} \vDash F[a_1, a_2, ..., a_n]\}.$$

On voit que $D(\mathcal{M})$, que l'on appelle le *diagramme complet de* $\mathcal{M}$, est la théorie complète de $\mathcal{M}^*$. Le *diagramme simple de* $\mathcal{M}$ est la théorie suivante de L_M :

$$\Delta(\mathcal{M}) = \{F[\underline{a_1}, \underline{a_2}, ..., \underline{a_n}]; F[\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}] \text{ est une formule sans quantificateur de L, } a_1, a_2, ..., a_n \in M \text{ et } \mathcal{M} \vDash F[a_1, a_2, ..., a_n]\}.$$

Montrez le lemme suivant (on étendra la fonction g de M dans N qui a a fait correspondre l'interprétation de $\underline{a}$ dans $\mathcal{N}$.

Lemme : si $\mathcal{M}$ est une L-structure, alors tout modèle de $\Delta(\mathcal{M})$ est isomorphe à une extendion de $\mathcal{M}^*$ (dans laquelle chaque symbole $\underline{a}$, pour $a \in M$, est donc interprété par a).

Partie 1

Préservation par sous structure

Définition : Une *formule universelle* est une formule prénexe dans laquelle le quantificateur existentiel n'a pas d'occurence. Une *théorie universelle* est une théorie composée uniquement de formules universelles.

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant.

Théorème Soit T une théorie dans un langage L ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une théorie universelle Ψ dans L équivalente à T.

ii) La théorie T est préservée par sous-structure (toute sous-structure d'un modèle est un modèle de la théorie).

1. Rappelez les trois axiomes (associativité, élément neutre, existance d'un inverse) de la théorie des groupes dans le langage L composé d'un symbole constant 1 et d'un symbole de fonction binaire $\cdot$.

2. Cette théorie est-elle universelle ?

3. Que se passe-t-il si on ajoute un symbole de fonction unaire $^{-1}$ pour désigner la fonction inverse ?

4. Vérifiez que la conjonction (resp. la disjonction) de deux formules universelles est équivalente à une formule universelle.

5. Montrez i) $\Longrightarrow$ ii).

6. Soient $\Psi = \{G; G$ est une formule universelle close et $T \vdash G\}$ et $\mathcal{M}$ un modèle de Ψ, montrez que $\Delta(\mathcal{M}) \cup T$ a un modèle.

7. En déduire le théorème.

Théorème : Une théorie est préservée par extention si et seulement si elle est équivalente à une théorie existentielle.

Partie 2 *Préservation par union de chaîne*

Définition : Une *formule* $\forall\exists$ est une formule prénexe de la forme

$$\forall v_1 \forall v_2 ... \forall v_n \exists v_{n+1} \exists v_{n+2} ... \exists v_{n+p} G,$$

où G est une formule sans quantificateur. Une théorie $\forall\exists$ est une théorie constituée de formules $\forall\exists$.

Remarquons que comme précédemment la conjonction ou disjonction d'un nombre fini de formules $\forall\exists$ est équivalente à une formule $\forall\exists$ (attention au renomage necessaire).

Définition : Une *théorie T est préservée par union de chaîne* si toute union de chaîne de modèles de T est encore un modèle de T. Une *formule close F est préservée par union de chaîne* si la théorie $\{F\}$ l'est.

On rapelle qu'une union de chaîne est une union

$$\cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$$

telle que $(I, <)$ est un ensemble totalement ordonné et que $i < j$ implique que $\mathcal{M}_i$ est une sous structure de $\mathcal{M}_j$.

Théorème : Une théorie est préservée par union de chaîne si et seulement si elle est équivalente à une théorie $\forall\exists$.

1. Montrer la partie directe.

   Définition : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux L-structures telles que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. On dit que $\mathcal{M}$ est une sous-structure 1-élémentaire de $\mathcal{N}$ et on écrit $\mathcal{M} \prec_1 \mathcal{N}$ si pour toute formule universelle $F[v_1, ..., v_n]$ de L et tous éléments $a_1, ..., a_n$ de M, si $\mathcal{M} \vDash F(a_1, ..., a_n]$ alors $\mathcal{N} \vDash F(a_1, ..., a_n]$.

   Lemme 1 : Supposons que $\mathcal{M} \prec_1 \mathcal{N}$, alors il existe $\mathcal{M}'$ telle que $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ et $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}'$.

2. Montrer le lemme 1.

   Lemme 2 : Soit $\mathcal{N}$ un modèle de Ψ, alors il existe une extention 1-élémentaire de $\mathcal{N}$ qui est un modèle de T.

3. Montrer le lemme 2.

4. En déduire la réciproque du théorème.