Connaissance des ensembles d'eniers

Laure Danthony

Table des matières

1 Récursivité des parties

Définition 1
Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite **récursive** si sa fonction caractéristique χ_A est récursive totale (c'est à dire qu'il existe un programme qui s'arrête toujours en répondant oui ou non à la question "x est dans A?").

Définition 2
Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite **récursivement énumérable** si il existe une fonction f ppr telle que $A = dom(f)$ (f s'arrête au bout d'un certain temps si x est dans A, continue sinon).

Proposition 1 (Evidentes)

1. *Si A est récursive, alors A est récursivement énumérable.*
2. *Si A et $\overline{A}$ sont récursivement énumérables, alors A est récursive.*

Exemples 1 (Exemples d'ensembles)

- *récursifs :* $\emptyset, \mathbb{N}$, *ensembles finis, entiers pairs.*
- *réc. énum. non réc. :* $K = \{x/\varphi_x(x) s'arrête\}$
- *ni réc. énum, ni réc. :* $K = \{x/\varphi_x(x) ne\ s'arrête\ pas\}$

Proposition 2

1. *Une partie A de $\mathbb{N}$ est récursivement énumérable ssi il existe g ppr telle que A soit l'image de g.*
2. *idem avec g récursive totale.*

2 Séparation récursive et parties immunes

2.1 Séparation récursive des parties

Définition 3
Deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{N}$ sont dits **récursivement énumérables** s'il n'existe pas d'ensemble récursif R tel que $A \subseteq R$ et $B \cap R = \emptyset$.

Proposition 3 $S_0 = \{i/\varphi_i(i) = 0\} et S_1 = \{i/\varphi_i(i) = 1\}$ *sont récursivement inséparables.*

2.2 Parties immunes

Définition 4
Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite **immune** si :

- $\overline{A}$ est infinie ;
- $\forall B$ récursivement énumérable, infinie, $A \cap B \neq \emptyset$.

DÉFINITION 5

Une partie A immune est dite simple si elle est immune récursivement énumérable. C'est à dire, pour une partie A de $\mathbb{N}$:

- A est récursive énumérable ;
- $\overline{A}$ est infinie ;
- $\forall B$ récursivement énumérable, infinie, $A \cap B \neq \emptyset$.

PROPOSITION 4

1. *Il existe une partie simple. (POST)*
2. *Il existe* $2^{\aleph_0}$ *parties de* $\mathbb{N}$ *telles que* A *et* $\overline{A}$ *soient immunes.*