Indécidabilité du problème du mot dans les monoïdes

Laure Danthony

Table des matières

1 Le problème du mot

1.1 Définitions préliminaires

DÉFINITION 1
Un **monoïde** (ou semi-groupe) est un ensemble S muni d'une loi binaire $S \times S \rightarrow S$ associative et qui possède un neutre.

EXEMPLE 1 *Muni de la loi . concaténation, S^* l'ensemble des mots sur l'alphabet S est un monoïde. On l'appelle le* **monoïde libre**.

On muni ensuite S d'une relation d'équivalence et on définit un **représentant canonique**.

EXEMPLE 2 *Avec $S = \{a, b\}$, la relation d'équivalence : $uabv \sim ubav$, les représentants canoniques des classes d'équivalence sont de la forme $a^n b^m$.*

1.2 Le problème du mot

Le problème du mot se formalise ainsi :

Etant donné deux mots u et v de S^*, est ce que $u \sim v$?

2 Les algorithmes de Markov

DÉFINITION 2

- On se donne un alphabet fini S et un ensemble de productions $p_1 \rightarrow q_1, \ldots p_n \rightarrow q_n$, avec $(p_i, q_i) \in S^*$ étiquetées ou non par t (comme terminal).Ainsi il y a deux types de productions, celles sans étiquette, et celles avec l'étiquette t.
- Partant un mot $u \in S^*$, on applique le plus à gauche possible la première transition appliquable du tableau de règles.
- Le processus **s'arrête** si la transition utilisée est étiquetée par t ou si aucune transition ne peut être appliquée.

EXEMPLE 3 *Soit $S = \{a, b, c\}$ et les règles $ac \rightarrow ca$, $bc \rightarrow cb$, $c \rightarrow a$ et $bb \rightarrow bc$. Alors avec ces règles, u termine sur $a^{|u|}$ s'il n'y avait aucun b, et sur $a^{|u|-1}b$ sinon.*

3 Un théorème important et la conclusion

THÉORÈME 1 *Les fonctions Markov-calculables sont les fonctions Turing-calculables.*

et l'on en déduit le :

THÉORÈME 2 *Le problème du mot est indécidable.*