

Méthode de démonstration
de l'incomplétude d'une théorie
et incomplétude du calcul des prédicats

Laure Danthony

Contents

1	Théorème de Gödel et méthode de démonstration	2
1.1	Remarque générale	2
1.2	Méthode de preuve à la Gödel	2
2	Application : incomplétude du calcul des prédicats	2
2.1	Le calcul des prédicats	2
2.2	Dans le cas du calcul des prédicats	2

1 Théorème de Gödel et méthode de démonstration

1.1 Remarque générale

Pour montrer, étant donnée une théorie T récursivement énumérable, qu'elle est indécidable, on montre en fait que $\{F/T \vdash F\}$ n'est pas récursif.

REMARQUE 1 Dans le cas du calcul des prédicats, $T = \emptyset$. En effet, le calcul des prédicats n'a aucun axiome.

1.2 Méthode de preuve à la Gödel

RAPPEL Les ensembles $N_0 = \{x/\varphi_x(x) = 0\}$ et $N_1 = \{x/\varphi_x(x) = 1\}$ sont récursivement inséparables.

Le théorème de Gödel peut être réécrit de la façon suivante :

THÉORÈME 1 (GÖDEL) *Si la théorie T est "assez compliquée", alors son ensemble de théorèmes n'est pas récursif.*

REMARQUE 2 Par théorie "assez compliquée" on entend une théorie dans laquelle on a pu définir un ensemble de formules F_i telles que $T \vdash F_i \Leftrightarrow i \in N_0$, à l'aide d'une application $f : i \mapsto \text{codage}(F_i)$ calculable par MT. Dès lors, si $\{F/T \vdash F\}$ était récursif, alors N_0 serait récursif et N_0 et N_1 seraient récursivement séparables à l'aide de N_0 , ce qui est absurde.

2 Application : incomplétude du calcul des prédicats

2.1 Le calcul des prédicats

DÉFINITION 1

Faire du calcul des prédicats, c'est partir d'un petit nombre de formules (axiomes), et trouver toutes les formules satisfaites par les objets étudiés.

REMARQUE 3 Pour de plus amples détails, voir le cours de logique des prédicats.

On cherche ici à montrer le :

THÉORÈME 2 (PHILOSOPHIQUE) *Le calcul des prédicats n'est pas automatisable, il ne se réduit pas au calcul par machine.*

2.2 Dans le cas du calcul des prédicats

Il faut coder le fonctionnement d'une MT par une formule du calcul des prédicats. On y arrive assez bien en introduisant des prédicats du type $H(x, t)$ (au temps t , la tête est sur la x -ième case) ...

PROPOSITION 1 *On a donc construit des formules F_i du calcul des prédicats qui codent le fonctionnement de MTs telles que $\emptyset \vdash F_i \Leftrightarrow v(F_i) = 1 \Leftrightarrow i \in N_1$.*

D'où (moyennant un changement minime : de N_0 à N_1) le :

THÉORÈME 3 *Le calcul des prédicats est indécidable.*