Indécidabilité de l'arithmétique de Peano

Laure Danthony

Contents

1 Définition de l'arithmétique de Peano

DÉFINITION 1
On se donne un type $\tau = \{\widetilde{0}, \widetilde{1}, \oplus, \otimes, <\}$, où $\widetilde{0}$ et $\widetilde{1}$ sont des constantes, $\oplus$ et $\otimes$ des fonctions binaires, $<$ une relation binaire. La théorie de Péano est une théorie sur ce type τ avec les axiomes suivants :

- $s_1 : \widetilde{0} \oplus \widetilde{1} = \widetilde{1}$
- $s_2 : \widetilde{x} \oplus \widetilde{1} \neq \widetilde{0}$
- (!! abus de notation) $s_3 : \forall x, x \neq 0 \Rightarrow \exists z, z + 1 = x$
- $s_4 : \forall x, y, x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$
- $a_1 : \forall x, x + 0 = x$
- $a_2 : \forall x, y, x + (y + 1) = (x + y) + 1$
- $m_1 : \forall x, x * 0 = 0$
- $m_2 : \forall x, y, x * (y + 1) = (x * y) + x$
- $t_1 : \forall x, y, (x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$.

FAIT 1 $\mathbb{N}$ *satisfait* T.

2 Démonstration de l'indécidabilité de l'arithmétique de Péano

2.1 Quelques lemmes utiles

PROPOSITION 1 *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T ($\mathcal{M} \models \mathcal{T}$). Alors $\mathbb{N}$ est un sous-modèle de $\mathcal{M}$ sur le type τ, ce qui est noté :*

$$\mathbb{N}(0, 1, +, *, <) \prec \mathcal{M}(\tau).$$

REMARQUE 1 La preuve se fait en deux temps : d'abord en faisant correspondre les *ensembles* $\mathbb{N}$ et $\mathcal{M}$ et ensuite en faisant correspondre leurs *structures*.

DÉFINITION 2
Une fonction $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est dite **représentable** s'il existe une formule $\mathbb{F}_\psi(x_1, \ldots, x_k, z)$ sur le type τ telle que, $\forall x, n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } m = \psi(n_1, \ldots, n_k) \text{ alors } T \vdash F_\psi(\widetilde{n_1}, \ldots, \widetilde{n_k}, \widetilde{m}) \text{ et} F_\psi \text{ est fonctionnel}$$

REMARQUE 2 "F_ψ est fonctionnel" signifie :

$$\forall x_1, \ldots, x_k, z, z' \in \mathbb{N}, F_\psi(x_1, \ldots, x_k, z) \wedge F_\psi(x_1, \ldots, x_k, z') \Rightarrow z = z'.$$

PROPOSITION 2 (DE BASE) *Toutes les fonctions ppr sont représentables, et ceci, effectivement, c'est-à-dire qu'il existe une MT qui, sur l'entrée i, donne le codage de F_{φ_i}.*

2.2 Les étapes de la démonstration

PROPOSITION 3 *Pour tout x de $\mathbb{N}$, $T \vdash S(\widetilde{x}) \Leftrightarrow \varphi_x(x) = 0$*

REMARQUE 3 On montre en fait que :

- Si $\varphi_x(x) = 0$ alors $T \vdash S(\widetilde{x})$,
- et si $T \vdash \neg S(\widetilde{x})$, alors $\varphi_x(x) = 1$.

RAPPEL $\{i/\varphi_i(i) = 0\}$ et $\{i/\varphi_i(i) = 1\}$ sont récursivement inséparables.

On montre par l'absurde avec la proposion 3 et le rappel précédent le :

THÉORÈME 1 *Dans T l'arithmétique de Péano on ne peut pas récursivement séparer les théorèmes de T des formules logiquement fausses, c'est-à-dire que les ensembles $\{F/T \vdash F\}$ et $\{F/T \vdash \neg F\}$ sont récursivement inséparables*

REMARQUE 4 “Séparer”, c'est faire en sorte que la machine réponde “c'est un théorème” ou “c'est une formule logiquement fausse” si on passe un codage d'une formule (théorème ou logiquement fausse) en paramètre à la machine de Turing.

D'où les deux corollaires importants :

COROLLAIRE 1 *L'arithmétique de Péano n'est pas une théorie complète.*

REMARQUE 5 Ici on utilise en plus le fait que si A et $\overline{A}$ sont récursivement énumérables, alors A est récursif.

COROLLAIRE 2 *L'arithmétique de Péano est indécidable.*