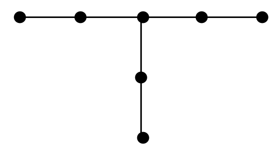
Examen du 17 mai 2001
Durée : 3h
Documents manuscrits autorisés

Exercice 1



Un *carterpillar* est un arbre ayant une chaîne (élémentaire) contenant au moins un sommet de chaque arête. Une telle chaîne est dite *dominante*.

1 - Montrer que, si T est un arbre, les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 a - T est un carterpillar ;
 b - tout sommet de T a au plus deux voisins qui ne sont pas des feuilles ;
 c - T ne contient pas le sous-graphe ci-dessus.

2 - Donner un algorithme détaillé en $\mathcal{O}(n)$ pour reconnaître si un arbre est un carterpillar. Justifier la méthode et analyser la complexité.

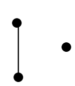
Exercice 2
Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une famille de n (≥ 1) sous-ensembles distincts d'un ensemble X à n éléments. On définit un graphe G dont l'ensemble de sommets est $\mathcal{A}$ et dans lequel A_iA_j est une arête si et seulement si il existe $x \in X$ tel que $A_i \vartriangle A_j = \{x\}$ où $\vartriangle$ est la différence symétrique. On étiquette alors A_iA_j par x. Pour un sous-graphe partiel H de G, on note label(H) l'ensemble des étiquettes utilisées par les arêtes de H.

1 - Montrer qu'il existe un forêt F contenue dans G telle que label(F) = label(G).

2 - En déduire qu'il existe un élément $x \in X$ tel que les ensembles $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, \ldots, A_n - \{x\}$ soient tous disctincts. Montrer que ce résultat n'est plus nécessairement vrai si $|\mathcal{A}| = n + 1$.

Exercice 3
Un graphe non orienté $G = (X, E)$ est un multiparti complet si on peut partitionner X en $\{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ de sorte que $xy \in E$ si et seulement si $x \in S_i,\ y \in S_j$ avec $i \neq j$.

1 - Montrer qu'un graphe est multiparti complet si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe à trois sommets ayant exactement une arête (graphe ci-dessous).



2 - Donner un algorithme précis de reconnaissance des graphes multipartis complets et analyser la complexité de cet algorithme. On peut obtenir du $\mathcal{O}(n + m)$.

.../...

Exercice 4
Montrer qu'un arbre $T = (X, E)$ admet un couplage parfait si et seulement si $\forall x \in X$ on a $i(T - \{x\}) = 1$, où $i(T - \{x\})$ est le nombre de composantes connexes d'ordre impair de $T - \{x\}$.

Exercice 5
Dans cet exercice $G = (X, E)$ est un graphe connexe non orienté dont les arêtes sont munies d'une valuation p strictement positive et $T = (X, F)$ est un arbre recouvrant de G de poids minimum. Le but de cet exercice est de calculer le second arbre recouvrant de poids minimum T', c'est-à-dire :
$T' = (X, F')$ tel que $p(T') = \min\{p(T") \mid T"$ arbre recouvrant de G et $T" \neq T\}$.

1 - Montrer qu'il existe un T' de la forme $T - \{e\} + \{f\}$ avec $e \in F$ et $f \in E \backslash F$.

2 - Étant donné un sommet x fixé, donner un algorithme en $\mathcal{O}(n)$ calculant pour tout $y \in X - \{x\}$ l'arête zt de poids maximum sur l'unique chaîne de T reliant x à y. Le résultat sera stocké dans un tableau de taille n, arête[y] contiendra zt. Justifier la complexité de l'algorithme.

3 - On appelle T_x un arbre recouvrant de plus petit poids de la forme $T_x = T - \{e\} + \{f\}$ où $e \in F$ et $f = xy \in E \backslash F$. Donner un algorithme en $\mathcal{O}(n)$ calculant T_x et justifier cette complexité.

4 - En déduire un algorithme calculant T'. Quelle est la complexité de l'algorithme ?