Enoncé du partiel du 18 avril 2001

Exercice 1

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. On appelle **complémentaire** de G le graphe noté $G^C = (X, F)$ ayant le même ensemble de sommets et tel que pour toute arête u on a $u \in F \Leftrightarrow u \notin F$.
On note K_n le graphe *complet* à n sommets.
On dit qu'un graphe $fG' = (X', E')$ est un **sous-graphe extrait** de $G = (X, E)$ si $X' \subset X$ et $\forall x \in X', \forall y \in X', xy \in E' \Leftrightarrow xy \in E$.

Montrer que de tout graphe $G = (X, E)$ avec $|X| \geq 6$, on peut extraire un sous-graphe égal à K_3 ou à K_3^C. Ce résultat est-il vrai pour $|X| = 5$?

Exercice 2

On dit que deux graphes $G = (X, E)$ et $G' = (X', E')$ sont **isomorphes** si il existe une bijection $\sigma : X' \to X$, telle que $\forall x \in X', \forall y \in X, xy \in E \Leftrightarrow \sigma(x)\sigma(y) \in E'$.
Un graphe est dit **auto-complémentaire** s'il est isomorphe à G^C. G .

1. Montrer qu'au moins un des deux graphes G et G^C est connexe.
2. On pose $n = |x|$; donner un exemple de graphe auto-complémentaire avec $n = 4$ et $n = 5$.
3. Montrer que si un graphe est auto-complémentaire, alors $n \equiv 0(mod4) \vee n \equiv 1(mod4)$.

Exercice 3

Dans un graphe simple (X, E) non orienté, on dit qu'un chemin est **hamiltonien** s'il passe une fois et une seule par chaque sommet, un cycle est **hamiltonien** si c'est un chemin fermé hamiltonien ; le graphe est **hamiltonien** (resp. **semi-hamiltonien**) si il existe un cycle (resp. un chemin) hamiltonien.
On dit que $G' = (X, E')$ est un **sur-graphe** de $G = (X, E)$ s'il possède le même ensemble de sommets et si l'ensemble E' de ses sommets contient l'ensemble E des arêtes de G.

1. Montrer que si $G = (X, E)$ est un graphe non hamiltonien, toute suite de sur-graphes $G_0 = G \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k$ où chaque sur-graphe est obtenu à partir du précédent par l'ajout d'une arête, est telle qu'au delà d'un certain rang tous les garohes sont hamiltoniens et que le dernier non hamiltonien est pré-hamiltonien.

2. *Théorème de Ore* On suppose que $n = |X| \geq 3$. Montrer que si G est tel que pour tout couple de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien (it on pourra raisonner par l'absurde avec une suite de sur-graphes comme à la question précédente, et calculer la somme des degrés des extrémités du chemin hamiltonien du dernier sur-graphe non hamiltonien).

3. *Théorème de Dirac* Montrer que pour tout graphe $G = (X, E)$ tel que $n = |X| \geq 3$, et $\delta \geq \dfrac{n}{2}$ où δ est le minimum des degrés des sommets, est hamiltonien. La réciproque est-elle exacte?

4. En déduire un programme qui calcule un cycle hamiltonien dans un graphe $G = (X, E)$ tel que $|X| \geq 3$ et $\delta \geq \frac{n}{2}$. Donner une borne supérieure de la complexité de votre programme.

Exercice 4

On travaille dans des graphes non orientés connexes.
Si $G = (X, E)$ est un graphe et $Y \subset X$, on note $G \setminus Y$ le graphe dont l'ensemble des sommets est $X \setminus Y$ et l'ensemble des arêtes les arêtes de E non incidentes à un élément de Y.
Un ensemble Y de sommets est un **séparateur** du graphe G si le graphe $G \setminus Y$ n'est pas connexe. Le séparateur est **minimal** si tout sous-ensemble strict de Y n'est pas un séparateur.
Un graphe G est dit **triangulé** si chaque cycle de plus de 3 sommets possède une corde.
Une **clique** de G est un sous-graphe extrait complet.

1. Montrer que si Y est un séparateur minimal de G, tout élément y de Y est adjacent à au moins un sommet de chaque composante connexe de $G \setminus Y$.

2. En déduire que si G est triangulé et si le séparateur minimal contient deux sommets distincts y et z, yz est une arête de E.

3. Montrer que si G est un graphe connexe contenant deux sommets a et b non adjacents, alors il existe un ab séparateur (séparateur tel que a et b sont dans deux composantes connexes differéntes).

4. En déduire qur si tout séparateur minimal de G est une clique, un cycle passant par a et b contient une corde.

5. Conclure en montrant ce théorème du à Dirac : un graphe connexe est triangulé si et seulement si chaque séparateur minimal est une clique.

Il y a une erreur d'énoncé dans les deux dernières questions de l'exercice 4, il semble qu'elle vienne de la définition de séparateur. La rédactrice refuse de les corriger ...