Corrigé du partiel du 18 avril 2001

Exercice 1

- Le pentagone montre un contre-exemple pour $|X| = 5$. On ne peut extraire K_3 ni dans ce graphe, ni dans son complémentaire étoilé .

- Montrons un résultat intermédiaire : un graphe G dont on ne peut extraire un sous-graphe égal à K_3 ou à K_3^C n'a pas de sommet de degré ≥ 3.

  Soit x un sommet de degré ≥ 3 et a, b, c trois de ses voisins. Si aucune des arêtes ab, bc et ac ne sont dans E alors le graphe extrait a, b, c est K_3^C. On a donc par exemple $ab \in E$ et alors $\{a, x, b\}$ forme K_3 (dessin !). Ce qui est absurde aussi. On a bien montré le résultat annoncé.

  Montrons maintenant le résultat demandé. Soit un graphe d'ordre 6 dont on ne peut extraire ni K_3 ni K_3^C. $G = (X, E)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On considère le degré d du premier sommet. On a $d < 3$ d'après le résultat précédent. Et par passage au complémentaire, $5 - d < 3$. On a donc $3 > d > 2$ ce qui est absurde. Un tel graphe d'ordre 6 n'existe pas et il est clair que les graphes d'ordre ≥ 6 ne peuvent pas vérifier la propriété car en en extrayant un graphe d'ordre 6 on aurait une contradiction.

Exercice 2

1. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. On suppose que G est non connexe. Soient $x, y \in E$. Si x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de G, en particulier $xy \notin E$ donc $xy \in E^C$. Supposons que x et y sont dans la même composante connexe A de G. Comme G est non connexe, il existe $z \notin A$ et donc en particulier $xz \notin E$ et $yz \notin E$ donc (xzy) est un chemin dans G^C. Donc G^C est connexe.

2. pour $n = 4$ considérer un "Z" et pour $n = 5$ considérer le pentagone.

3. Soit k le nombre d'arêtes de G auto-complémentaire. On a donc la relation $k = \dfrac{n(n-1)}{2} - k$ soit $4k = n(n-1)$, ou bien encore $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 1[4]$.

Exercice 3

1. - Il est clair que tout sur-graphe d'un graphe hamiltonien est hamiltonien, donc si il existe k_0 tel que G_{k_0} est hamiltonien, alors $\forall k \geq k_0$, G_k est hamiltonien. De plus, un tel indice k_0 existe car la suite de graphes atteint K_n qui est hamiltonien.

- Soit $k_0 = \text{Min}\{k/G_k \text{ est hamiltonien}\}$, $k_0 > 0$ et G_{k_0-1} n'est pas hamiltonien. Comme G_{k_0} est hamiltonien, il existe un cycle $(x_1, \ldots, x_n)$ hamiltonien dans G_{k_0}. Ce cycle n'existe pas dans G_{k_0-1} mais comme celui-ci ne diffère de G_{k_0} que d'une seule arête, le cycle $(x_1, \ldots, x_n)$ est ouvert en un seul endroit dans G_{k_0-1} et il forme donc un chemin hamiltonien dans G_{k_0-1} (dessin !). Finalement, G_{k_0-1} est pré-hamiltonien.

2. Supposons G non hamiltonien sous les hypothèses données. On prend comme à la question précédente une suite $G = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k$, avec G_i pré-hamiltonien et G_{i+1} hamiltonien. Soit $\mu = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ un chemin hamiltonien de G_i. Comme $(x_1, x_n) \notin G_i$, $(x_1, x_n) \notin G$ puisque G_i a été obtenu en ajoutant des arêtes à G. D'après les hypothèses, $d(x_1) + d(x_n) \geq n$ donc $d_{G_i}(x_1) + d_{G_i}(x_n) \geq n$. Les voisins de x_1 sont à chercher parmi $x_2, \ldots x_{n-1}$. Si aucun des antécédents des voisins de x_1 ne sont voisins de x_n, alors il me reste $n - 1 - d(x_1)$ candidats possibles comme voisins de x_n. Donc $d(x_n) \leq n - 1 - d(x_1)$. Absurde. Le graphe G est donc hamiltonien.

3.
   - Si $\displaystyle\operatorname*{Min}_{x \in X} d(x) = \delta \geq \frac{n}{2}$, alors pour tout couple de sommets non adjacents $d(x) + d(y) \geq n$ donc d'après la question précédente le graphe est hamiltonien.
   - la réciproque est fausse : considérer le pentagone.

4. Construire un chemin élémentaire maximal $\mu = (x, \ldots, y)$. :
   - Si il a n sommets et qu'il se ferme c'est fini.
   - Sinon ses extrémités sont reliés à des sommets de l'intérieur :
     - on marque les voisins de x, les voisins de y,
     - on parcourt μ jusqu'à trouver x_i voisin de x et x_{i+1} voisin de y.
     - je remplace μ par $\nu = (x_i, y, \ldots, x_{i+1}, x, \ldots, x_i)$.
       - si ν a n sommets, c'est fini.
       - sinon les sommets de ν ont des voisins extérieurs à ν, j'ouvre ν, je connecte, je recommence.

   Cet algorithme est en $O(n(m + n))$.

Exercice 4

1. Si il existait une partie C telle que pour tout sommet x dans C, $xy \notin E$, alors $Y \setminus Y$ serait un séparateur, ce qui n'est pas possible. Sinon prenons $x \in C$, $z \notin C$, $z \notin Y$. Il existe un chemin de x à y dont les sommets sont dans $(G \setminus Y) \cup \{y\}$. Soit tu la première arête de ce chemin partant de C, $t \in C$, $u \notin C$. On a forcément $u = y$, contradiction.

2. y et z ont forcément chacun un voisin dans C_1 et un voisin dans C_2. On minimise le cycle en cherchant les cordes : dans C_1, dans C_2 , entre y (ou z) et un point de C_1 (ou de C_2). Et comme c'est triangulé, $xy \in E$ car on se retrouve avec un cycle à 4 sommets.

3. $(a, b) \notin E$, donc $X \setminus \{a, b\}$ convient.