

Graphes : principales définitions et théorèmes

Laure Danthony

D'après le cours de Vincent Bouchitté, janvier - mai 2001

Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Graphes orientés, non orientés	3
1.2	Adjacence, incidence, voisinage	3
1.3	Premières propriétés	3
1.4	Sous-structures, cliques	4
1.5	Chemins, chaînes, cycles	4
1.5.1	Graphes non orientés	4
1.5.2	Graphes orientés	5
1.6	Notion de connexité	5
2	Arbres	6
2.1	Définitions	6
2.2	Un théorème important	6
2.3	Notion de sous-arbre	6
3	Parcours d'un graphe	7
3.1	Représentation des graphes	7
3.2	Parcours en largeur et en profondeur	7
3.2.1	Parcours en largeur	7
3.2.2	Parcours en profondeur	7
3.3	Plus court chemin	8
4	Graphes orientés sans circuit	9
4.1	Algorithme de reconnaissance	9
4.2	Tri topologique	9
4.3	Décomposition en niveaux	9
4.4	Ordres gradués	10
5	Arbre couvrant de poids minimum	11
5.1	Le problème de l'arbre couvrant	11
5.2	Caractérisations: cycle/cocycle fondamental	11
5.3	Principaux algorithmes	11
5.3.1	Algorithme de Kruskal	11
5.3.2	Algorithme de Prim	12

6	Chemin de coût minimum	13
6.1	Le problème du chemin de coût minimum	13
6.2	Algorithme de Dijkstra	13
6.3	Algorithme de Bellman	13
7	Facteurs de graphes	14
7.1	Notion de facteur et de couplage	14
7.2	Principaux théorèmes	14
7.3	Graphes eulériens	15
8	Couplage maximum dans les bipartis	16
8.1	Couplage dans des graphes quelconques	16
8.2	Couplage dans les bipartis	16
9	Connexité	17
9.1	Définitions	17
9.2	Principaux résultats	17
9.3	Connexité	17
10	Flot maximum dans un réseau	19
10.1	Définitions	19
10.2	Méthode de Ford-Fulkerson	19
10.3	Algorithme d'Edmonds Karp	20
11	Coloration de graphes	21
11.1	Indice chromatique	21
11.2	Nombre chromatique	21

1 Généralités

1.1 Graphes orientés, non orientés

DÉFINITION 1 (GRAPHE NON ORIENTÉ)

Un graphe non orienté est un graphe $G = (X, E)$ où X est un ensemble dont les éléments sont appelés **sommets** et $E \subseteq \mathcal{P}_2(X)$, les éléments de E étant appelés **arêtes**. Quelquefois (pas dans la suite), on autorise les boucles et les arêtes multiples.

REMARQUE 1 Généralement et dans toute la suite, on note $n = |X|$ le nombre de sommets et $m = |E|$ le nombre d'arêtes.

DÉFINITION 2 (GRAPHE ORIENTÉ)

On appelle **graphe orienté** une couple $G = (X, U)$ où X est un ensemble dont les éléments sont appelés **sommets** et $U \subseteq X \times X \setminus \{(x, x), x \in X\}$. Autrement dit, les arêtes sont “fléchées” et on interdit les boucles.

1.2 Adjacence, incidence, voisinage

DÉFINITION 3 (ADJACENCE)

- Deux sommets x et y sont dits **adjacents** (x est un voisin” de y et vice-versa) si $\{x, y\} \in E$. On note plutôt xy au lieu de $\{x, y\}$.
- Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont un sommet en commun.

DÉFINITION 4 (VOISINAGE, DEGRÉ D'UN SOMMET)

- L'ensemble des voisins de x est appelé le **voisinage** (!) de x et est noté $\Gamma(x)$.
- Le nombre de voisins de x est son **degré** et est noté $d(x)$.

REMARQUE 2 On définit pour les graphes orienté Γ_x le “voisinage sortant” de x (cad les sommets atteints “à partir de x ”) et le “degré sortant $d^+(x)$ ”. La même notion existe pour le voisinage dit “entrant”.

1.3 Premières propriétés

PROPOSITION 1

Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. On a alors :

1. $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\sum_{x \in X} d(x)$ est pair.
3. il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

PROPOSITION 2 Soit $G(X, E)$ un graphe non orienté. Alors il existe deux sommets qui ont le même degré, cad :

$$\exists x, y, x \neq y, d(x) = d(y).$$

1.4 Sous-structures, cliques

Soit $G(X, E)$ un graphe non orienté.

DÉFINITION 5

$G' = (X', E')$ est un **graphe partiel** de G si $E' \subseteq E$.

DÉFINITION 6

$G' = (X', E')$ est un **sous-graphe** de G si $X' \subseteq X$ et $E' = E \cap \mathcal{P}_2(X')$ (on enlève des sommets et les arêtes correspondantes). On note $G' = G[X']$.

DÉFINITION 7

$G' = (X', E')$ est un **sous-graphe partiel** de G si $X' \subseteq X$ et $E' \subseteq E \cap \mathcal{P}_2(X')$.

DÉFINITION 8

1. K_p est le graphe complet à p sommets.
2. S_p est le graphe sans arête à p sommets.

DÉFINITION 9

1. Un sous-graphe de G isomorphe à K_p est appelé **clique**.
2. Un sous-graphe de G isomorphe à S_p est un **stable** (ou ensemble indépendant).

1.5 Chemins, chaînes, cycles

1.5.1 Graphes non orientés

Soit $G(X, E)$ un graphe non orienté.

DÉFINITION 10

Un **parcours** de G est une suite $\mu = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ où $\forall i, x_i \in X$ et $\forall 1 \leq i \leq k-1, x_i x_{i+1} \in E$.

DÉFINITION 11

Le parcours est dit **fermé** si $x_1 = x_k$.

DÉFINITION 12

Une **chaîne** est un parcours sans répétition d'arête.

DÉFINITION 13

Une chaîne fermée est un **cycle**.

DÉFINITION 14

La **longueur** d'une chaîne ou d'un cycle est son nombre d'arêtes

DÉFINITION 15

Une chaîne ou un cycle est dit **élémentaire** si il n'y a pas répétition de sommet.

PROPOSITION 3 *De toute chaîne on peut extraire une chaîne élémentaire ayant les mêmes extrémités.*

1.5.2 Graphes orientés

Soit $G(X, U)$ un graphe orienté.

DÉFINITION 16

Un **chemin** est une suite x_1, \dots, x_k de sommets de G telle que $\forall 1 \leq i \leq k - 1, (x_i, x_{i+1}) \in U$ et il n'y a pas de répétition d'arc.

DÉFINITION 17

Un chemin est un **circuit** si $x_1 = x_k$.

REMARQUE 3 On a ici aussi les notions de chemin et de circuit **élémentaires**.

DÉFINITION 18

Une chaîne est une suite (x_1, \dots, x_k) de sommets de G telle que

1. $\forall i, 1 \leq i \leq k - 1, (x_i, x_{i+1})$ ou $(x_{i-1}, x_i) \in U$

2. Il n'y a pas de répétition d'arc.

1.6 Notion de connexité

DÉFINITION 19

Deux sommets x et y de $G(X, E)$ sont **connectés** si il existe une chaîne (élémentaire) les reliant.

PROPOSITION 4 *La relation "être connecté" est une relation d'équivalence*

D'où la :

DÉFINITION 20

Les classes d'équivalence d'un graphe G pour la relation "être connecté" sont les **composantes connexes** de G .

DÉFINITION 21

Un graphe est dit **connexe** si il n'a qu'une seule composante connexe.

2 Arbres

2.1 Définitions

DÉFINITION 22 (ARBRE)

Un graphe $G = (X, E)$ est un **arbre** s'il est connexe sans cycle.

DÉFINITION 23 (FEUILLE)

Un sommet pendant est appelé **feuille**.

REMARQUE 4 La notion de "racine" n'est pas intrinsèque. Elle est seulement utile au codage.

2.2 Un théorème important

LEMME 1 Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté.

- Si G est sans cycle et a plus d'une arête, alors G a au moins un sommet de degré au moins 1.
- Si G est connexe et $m = n - 1$ alors G possède au moins un sommet de degré égal à 1.

THÉORÈME 1 (IMPORTANTES CARACTÉRISATIONS) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $G = (X, E)$ est un arbre ;
- G est sans cycle et $m = n - 1$;
- G est connexe et $m = n - 1$;
- G est sans cycle maximal (si on ajoute une arête, on crée un cycle) ;
- G est connexe minimal (si on lui enlève une arête, il n'est plus connexe) ;
- Deux éléments quelconques de G sont reliés par une unique chaîne élémentaire.

2.3 Notion de sous-arbre

DÉFINITION 24 (SOUS-ARBRE)

Un **sous-arbre** d'un arbre est un sous-graphe connexe.

LEMME 2 Si $T_1 = (X_1, E_1)$ et $T_2 = (X_2, E_2)$ sont deux sous-arbres de $T = (X, E)$, alors $T_1 \cap T_2 = (X_1 \cap X_2, E_1 \cap E_2)$ est un sous-arbre de T .

PROPOSITION 5 (DE HELLY) Soit $T = (X, E)$ un arbre. Soit $(T_i = (X_i, E_i))_{1 \leq i \leq k}$ une famille de sous-arbres de T . Alors :

$$\text{si } \forall i, j, T_i \cap T_j \neq \emptyset, \text{ alors } \bigcap_{i=1}^k T_i \neq \emptyset.$$

3 Parcours d'un graphe

3.1 Représentation des graphes

Il y a deux principales manières de représenter les graphes (orientés):

- La matrice d'adjacence, où $a_{i,j} = 1$ si l'arête (i, j) existe, 0 sinon.
- Un tableau de listes d'adjacences: la case i contient la liste de tous les sommets voisins de i .

Selon la méthode employée, le coût des opérations élémentaires diffèrent :

- **matrice d'ajacence**: taille des données $O(n^2)$, existence de l'arc (i, j) : $O(1)$, degré (interne ou externe) du sommet i : $O(n)$, degré externe de tous les sommets $O(n^2)$.
- **tableau des voisins** : taille $O(n + m)$, existence de l'arc (i, j) ou le degré externe de i : $O(d^+(i)) = O(n)$, degré interne de j : $O(n + m)$, degré externe de tous les sommets $O(n + m)$.

3.2 Parcours en largeur et en profondeur

3.2.1 Parcours en largeur

On examine les sommets un par un: pour chaque sommet, on parcourt complètement ses successeurs, puis les successeurs des successeurs, jusqu'à ce que tous les sommets aient été parcourus. On gère donc l'arbre comme une *file*. La complexité est en $O(n + m)$.

3.2.2 Parcours en profondeur

On part d'un sommet, on exhibe un voisin, puis un voisin d'un voisin, et ainsi de suite jusqu'à ne plus pouvoir continuer. On remonte alors jusqu'à pouvoir recommencer. La structure utilisée est alors une *pile* (ou mieux, on utilise la récursivité). Là encore, la complexité est en $O(n + m)$.

Ce parcours permet, au contraire du parcours en largeur, de structurer les arcs du graphe en plusieurs catégories:

- **les arcs de la forêt**: ce sont les arcs empruntés par le parcours, ils vérifient $OE(x) < OE(y)$ et $OD(x) > OD(y)$ où OE et OD sont respectivement l'ordre d'empilement et de dépilement du sommet considéré.
- **les arcs de transitivité**: ce sont les arcs qui relient un sommet x à un sommet atteint au cours de la procédure `recherche(x)` (procédure qui permet d'atteindre récursivement le voisinage d'un sommet). Ils vérifient aussi $OE(x) < OE(y)$ et $OD(x) > OD(y)$.
- **les arcs de retour**: ce sont les arcs qui relient un sommet atteint par `recherche(x)` au sommet x . Ils vérifient $OE(x) > OE(y)$ et $OD(x) < OD(y)$.
- **les arcs traversiers**: ce sont tous les autres arcs. ils vérifient $OE(x) > OE(y)$ et $OD(x) > OD(y)$.

Remarquer que pour un graphe non orienté, arc de transitivité = arc retour .

3.3 Plus court chemin

DÉFINITION 25 (DISTANCE)

Soit $G(X, E)$ un graphe non orienté, et soient x et y deux sommets de G . La **distance** $\delta(x, y)$ entre x et y est la longueur d'une plus courte chaîne entre x et y . Si elle n'existe pas, $\delta(x, y) = +\infty$.

DÉFINITION 26 (DIAMÈTRE)

Le **diamètre** d'un graphe est le maximum des distances entre deux sommets.

DÉFINITION 27 (EXCENTRICITÉ)

L'**excentricité** d'un sommet d'un graphe est le maximum de ses distances à un autre sommet.

DÉFINITION 28 (RAYON)

Le **rayon** d'un graphe est le minimum des excentricités de ses sommets.

Le problème est le suivant : étant donné un sommet s de G , calculer $\delta(s, x)$ pour tout autre sommet x , et ainsi en déduire son excentricité. Pour cela, on effectue un *parcours en largeur* à partir de s , en ajoutant un compteur qui conserve la distance à partir de s .

4 Graphes orientés sans circuit

4.1 Algorithme de reconnaissance

Il s'agit de reconnaître les graphes orientés sans circuit.

LEMME 3 Soit $G(X, U)$ un graphe orienté. Si G est sans circuit, alors il existe $x \in X$ tel que $d^-(x) = 0$.

THÉORÈME 2 Un graphe orienté $G(X, U)$ est sans circuit ssi il existe $x \in X$ tel que $d^-(x) = 0$ et pour tout x vérifiant $d^-(x) = 0$, $G \setminus \{x\}$ est sans circuit.

Ce théorème fournit un premier algorithme de reconnaissance d'un graphe orienté sans circuit qui est en $O(n.(n + m))$.

THÉORÈME 3 Un graphe orienté $G(X, U)$ est sans circuit ssi il existe une permutation $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ des sommets de G telle que $d_{G_i}(x_i) = 0$ où $G_i = G \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, c'est à dire G privé de ses $i - 1$ premiers sommets.

Ce théorème permet d'obtenir un algorithme en $O(n + m)$: on commence par calculer les degrés entrant (on stocke leur nombre dans un compteur), on prend un sommet de degré entrant nul, puis on regarde ses voisins dont on diminue le degré entrant. Si un degré devient nul, on incrémente le compteur et on empile le sommet considéré. Si lorsque l'on a fini le compteur est à n , il n'y a pas de circuit, sinon il y a un circuit.

4.2 Tri topologique

DÉFINITION 29

Soit $G(X, U)$ un graphe orienté. Un **tri topologique** est une permutation $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ des sommets telle que $(x_i, x_j) \in U \Rightarrow i > j$.

THÉORÈME 4 G admet un tri topologique ssi G est sans circuit.

Pour déterminer tous les tris topologiques, notons $\Pi(G)$ l'ensemble de ces tris et $S(G)$ l'ensemble des sources de G , c'est à dire l'ensemble des sommets de degré entrant nul. Alors on a :

$$\Pi(G) = \bigcup_{s \in S(G)} \{s.\sigma \mid \sigma \in \Pi(G \setminus \{s\})\},$$

Ce qui fournit un algorithme récursif.

4.3 Décomposition en niveaux

DÉFINITION 30 (HAUTEUR)

Soit $G(X, U)$ un graphe orienté sans circuit. On définit une fonction de hauteur $h, X \rightarrow \mathbb{N}$, par :

- $h(x) = 0$ si $d^-(x) = 0$.
- $h(x) = 1 + \max\{h(y) \mid (y, x) \in U\}$ sinon.

L'algorithme utilisé est une reconstruction de l'algo précédent, en ajoutant la construction des niveaux. Il est en $O(n + m)$.

Il fournit aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 6 *En notant $h(G) = \text{Max}_{x \in X} h(x)$, il existe un chemin de G de longueur $h(G)$.*

4.4 Ordres gradués

On considère un graphe $G(X, U)$ orienté sans circuit. On rappelle que (x, y) est un arc de transitivité s'il existe un chemin $\mu = (x_1 = x, \dots, x_k = y)$ qui ne passe pas par l'arc (x, y) .

DÉFINITION 31 (GRAPHE GRADUÉ)

Un graphe G est **gradué** si il existe une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tout $(x, y) \in U$, on ait $h(y) = h(x) + 1$.

DÉFINITION 32 (LONGUEUR COMPENSÉE)

On définit la **longueur compensée** d'une chaîne comme étant la différence des nombres d'arcs dans le bon et le mauvais sens : soit $\mu = (x_1, \dots, x_k)$ une chaîne. Alors $lc(\mu) = l - l'$ où $l = \text{Card}\{(x_i, x_{i+1}) \in U\}$ et $l' = \text{Card}\{(x_{i+1}, x_i) \in U\}$.

On cherche un algorithme permettant de déterminer si un graphe à source unique est gradué ou non. On utilise le fait qu'un tel graphe est gradué ssi tous les chemins (orientés) reliant deux sommets quelconques ont le même nombre d'arcs. On parcourt donc le graphe en largeur à partir de la source. S'il y a égalité de la hauteur à chaque niveau, on continue. Dans le cas contraire, on sort de l'algorithme.

5 Arbre couvrant de poids minimum

5.1 Le problème de l'arbre couvrant

Etant donné un graphe $G(X, E)$ muni d'une pondération p des arêtes, fonction de E dans \mathbb{R} , le poids d'un sous-graphe partiel $G'(X', E')$ de G est :

$$p(G') = \sum_{e \in E'} p(e).$$

On cherche alors $T = (X, F)$ graphe partiel de G tel que :

1. T est un arbre (dit **couvrant** ou **recouvrant**) ;
2. $p(T)$ est minimal sur l'ensemble des arbres couvrants de G .

On obtient facilement le :

THÉORÈME 5 *Un graphe $G(X, E)$ admet un arbre couvrant ssi G est connexe.*

5.2 Caractérisations : cycle/cocycle fondamental

Ces caractérisations serviront à justifier les différents algorithmes de calcul d'arbre couvrant de poids minimum.

Soient $G(X, E)$ un graphe et $T(X, F)$ un arbre couvrant de G .

DÉFINITION 33 (CYCLE FONDAMENTAL)

Etant donné une arête $e \in E \setminus F$, le **cycle fondamental** associé à e est l'unique cycle $\mu_T(e)$ de $T \cup \{e\}$.

DÉFINITION 34

Etant donnée une arête $f \in F$, $\omega_T(e)$ est l'ensemble des arêtes reliant une composante connexe de $T \setminus \{e\}$ à l'autre.

THÉORÈME 6 *Soit $G(X, E)$ un graphe connexe et p une pondération sur les arêtes de G , T un arbre couvrant de G . Alors T est de poids minimal ssi :*

$$\forall e \in F, \forall f \in \omega_T(e), p(e) \leq p(f).$$

THÉORÈME 7 *Soit $G(X, E)$ un graphe connexe et p une pondération sur les arêtes de G , T un arbre couvrant de G . Alors T est de poids minimal ssi :*

$$\forall f \in E \setminus F, \forall e \in \mu_T(f), p(e) \leq p(f).$$

5.3 Principaux algorithmes

5.3.1 Algorithme de Kruskal

On range les arêtes par poids croissants. Ensuite on prend l'arête de poids minimum, puis la deuxième seulement si on ne crée pas de cycle, etc. On aboutit à un arbre couvrant de poids minimum (grâce au théorème 7).

Une implémentation naïve de cet algorithme donne une complexité de $O(mn)$. Si on introduit des tableaux représentant les différentes composantes connexes, on peut obtenir une complexité de $O(m \log n)$.

5.3.2 Algorithme de Prim

On choisit un sommet, puis une arête qui lui est adjacente, de poids minimal. Parmi les arêtes qui sont adjacentes à ces deux sommets, on choisit une arête de poids minimal (qui aboutit *bien sûr* à des sommets non déjà vus). On continue ce processus jusqu'à atteindre tous les sommets.

Une implémentation facile donne une complexité de $O(n^2)$.

6 Chemin de coût minimum

6.1 Le problème du chemin de coût minimum

On considère un graphe orienté $G(X, U)$ et une pondération c , fonction de U dans \mathbb{R} . Si $\mu = (x_1, \dots, x_n)$ est un chemin de G , on appelle **coût** de μ le réel :

$$c(\mu) = \sum_{i=1}^{n-1} c(x_i x_{i+1})$$

Le problème est : étant donné une source s et un puits p , de trouver un chemin μ allant de s à p et minimisant $c(\mu)$. Notons tout de suite que si on permet les poids négatifs, un tel chemin n'existe pas toujours (il peut exister des "cycles absorbants").

6.2 Algorithme de Dijkstra

On se restreint à une pondération positive. L'idée est de calculer une arborescence de plus courts chemins entre s et tous les autres sommets. L'initialisation se fait en mettant comme coût : 0 à s , et $+\infty$ aux autres. On part de s , puis on empile tous ses voisins avec leur distance à s . On choisit alors a un de ceux de coût minimal (on le dépile) et on examine ses voisins. Parmi ceux-ci, on empile ceux que l'on n'a pas encore visités, et pour les autres on regarde si on peut modifier leur coût en remplaçant leur prédécesseur par a . Dans le cas positif, on remplace le nom de leur "ancêtre" par a . On recommence avec un sommet de la pile de coût minimum. A la fin, on obtient le poids minimum pour atteindre p , et en plus le chemin qui permet de l'obtenir (en remontant les ancêtres).

L'algorithme est facilement implémentable en $O(n^2)$. On peut figoler un peu en utilisant un tas pour la structure qui contient les sommets à traiter.

6.3 Algorithme de Bellman

Ici les poids peuvent être négatifs. L'algorithme pourra détecter un éventuel cycle absorbant.

Dans un premier temps, on donne un algorithme qui permet de calculer un chemin de poids minimum. Il repose sur la constatation qu'un chemin de coût minimum de s à x passe forcément par un des prédécesseurs de x !. Si on calcule les $\mu(s, x)$ dans l'ordre d'un tri topologique, on connaît toutes les valeurs des $\mu(s, y)$ pour y prédécesseur de x . De plus, il faut restreindre l'espace de recherche aux x accessibles de s . Dans un premier temps, l'algorithme inverse le sous-graphe accessible de s . On suit le tri topologique en décrémentant les degrés internes des sommets.

Cet algorithme permet une implémentation en $O(n + m)$.

7 Facteurs de graphes

On s'intéresse à l'existence, dans un graphe donné, d'un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes qui recouvre l'ensemble des sommets du graphe.

7.1 Notion de facteur et de couplage

DÉFINITION 35 (GRAPHE FACTORISABLE)

Un graphe $G(X, E)$ est dit **factorisable** si il existe une partition $\{E_1, \dots, E_p\}$ des arêtes telle que chacun des graphes partiels $G_i = (X, E_i)$ soit k -régulier, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, on ait : $d_{G-i}(x) = k$. Les graphes partiels G_i sont appelés **k -facteurs** de G .

Par exemple, un graphe est 2-factorisable si on peut le recouvrir par des cycles.

DÉFINITION 36 (COUPLAGE)

Un **couplage** d'un graphe est un ensemble C d'arêtes de E tel que deux arêtes de C n'ont pas de sommet commun.

Autrement dit, $G' = (X, C)$ est tel que $d_{G'}(x) \leq 1$ pour tout x . Les sommets dont le degré dans G' est exactement 1 sont dits **C -saturés**, ceux de degré nul sont dits **C -insaturés**.

DÉFINITION 37

Un couplage C est dit :

- **maximal** si il est maximal au sens de l'inclusion (si on ajoute une arête, ce n'est plus un couplage).
- **maximum** si il est maximal au sens de la cardinalité.
- **parfait** si c'est un 1-facteur, c'est-à-dire s'il sature tous les sommets.

Remarquons que si G admet un couplage parfait, alors G est d'ordre pair.

DÉFINITION 38 (CHAÎNE AMÉLIORANTE)

Soit $G(X, E)$ un graphe non-orienté et C un couplage de G . Soit $\mu = (x_1, x_2, \dots, x_{2k})$ une chaîne de G , elle est dite **C -améliorante** si :

1. x_1 et x_{2k} sont C -insaturés.
2. pour tout i , l'arête $x_{2i}x_{2i+1}$ est dans C , et l'arête $x_{2i-1}x_{2i}$ est dans C .

DÉFINITION 39

Une chaîne est dite **C -alternée** si ses arêtes sont alternativement dans C et dans $E \setminus C$.

7.2 Principaux théorèmes

THÉORÈME 8 (BERGE 1938) *Soit $G(X, E)$ un graphe et C un couplage de G . Le couplage C est maximum ssi il n'existe pas de chaîne C -améliorante.*

THÉORÈME 9 *Tout graphe biparti k régulier admet un couplage parfait.*

PROPOSITION 7 *Tout graphe biparti k régulier est 1-factorisable.*

7.3 Graphes eulériens

DÉFINITION 40

Un graphe connexe est **eulérien** si il existe un cycle passant une fois et une seule par chaque arête.

PROPOSITION 8 (EULER) *Un graphe connexe est eulérien ssi le degré de chacun de ses sommets est pair.*

Cette notion sert à démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 10 (PETERSON) *Un graphe est 2-factorisable ssi il est $2k$ -régulier.*

THÉORÈME 11 (TUTTE, 1947) *Un graphe $G(X, E)$ admet un couplage parfait (1-facteur) ssi quel que soit S un sous-ensemble des sommets, le nombre de composantes connexes de $G \setminus S$ d'ordre impair est inférieur ou égal à $|S|$.*

8 Couplage maximum dans les bipartis

On recherche ici des couplages maximaux en terme de cardinalité.

8.1 Couplage dans des graphes quelconques

THÉORÈME 12 *Soit $G(X, E)$ un graphe, C_1 et C_2 deux couplages de cardinaux respectifs r et s avec $r < s$. Alors G - en fait $C_1 \oplus C_2$ - contient au moins $s - r$ chaînes C_1 améliorantes.*

THÉORÈME 13 *Soit C un couplage de G avec $|C| = r$. On note $\nu(G) = s$ le cardinal d'un couplage maximal. Si $r < s$, il existe alors une chaîne C -améliorante de longueur inférieure ou égale à $2\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1$.*

THÉORÈME 14 *Soient C un couplage de G , μ une plus courte chaîne C -améliorante et μ' une chaîne $C \oplus \mu$ -améliorante. Alors $|\mu'| \geq |\mu| + 2|\mu \cap \mu'|$.*

Ce théorème donne un algorithme de calcul d'une suite de couplages C_0, \dots, C_s telle que $s = \nu(G)$ et $|C_i| = i$.

THÉORÈME 15 *Le nombre d'entiers différents dans la suite $|\mu_1|, \dots, |\mu_s|$ est au plus $2\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 2$.*

On utilise l'algorithme suivant : tant qu'il existe une chaîne C -améliorante, calculer un ensemble maximal de plus courtes chaînes améliorantes deux-à-deux disjointes. Faire $C \leftarrow C \oplus \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_k$.

8.2 Couplage dans les bipartis

Dans les graphes bipartis, il est très facile de contruire à partir du graphe G un graphe orienté G' dans lequel les chemins maximaux seront en bijection avec les plus courtes chaînes C -améliorantes de G . La construction d'un tel graphe prend $O(n + m)$.

D'après le théorème 15, on a au plus $\sqrt{s} = O(\sqrt{n})$ constructions de tels graphes orientés. On a donc facilement un algorithme en $O(\sqrt{n}(n + m))$ pour le calcul d'un couplage maximum dans les bipartis.

9 Connexité

9.1 Définitions

DÉFINITION 41 (AB-CHAÎNE)

Soit $G(X, E)$ un graphe. On considère A et B deux sous-ensembles de X . Une **AB-chaîne** est une chaîne (a, \dots, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

DÉFINITION 42 (AB-SÉPARATEUR)

Un **AB-séparateur** est un ensemble de sommets $S \subseteq X$ tel que $G[X \setminus S]$ ne contienne plus de AB-chaîne.

NOTATION :

On note $p(A, B, G)$ le nombre maximal de AB-chaînes 2 à 2 disjointes (sans sommets communs). On note $q(A, B, G)$ le cardinal minimum d'un AB séparateur.

DÉFINITION 43 (SÉPARATEUR)

Soit $G(X, E)$. On dit que $Y \subseteq X$ sépare x et y si x et y sont dans deux composantes connexes différentes de $G[X \setminus Y]$, on dit aussi que Y est un **xy-séparateur**.

REMARQUE 5 ! Ne pas confondre xy -séparateur et $\{x\}\{y\}$ -séparateur.

NOTATION :

On note $p(x, y, G)$ le nombre maximal de xy -chaînes 2 à 2 disjointes (sans sommets communs). On note $k(x, y, G)$ le cardinal minimum d'un xy séparateur si $xy \notin E$.

9.2 Principaux résultats

THÉORÈME 16 (MENGER, 1927) Soit $G(X, E)$ un graphe, on a

$$p(A, B, G) = q(A, B, G).$$

THÉORÈME 17 (MENGER) Dans un graphe $G(X, E)$, on a

$$p(x, y, G) = k(x, y, G).$$

9.3 Connexité

DÉFINITION 44 (CONNEXITÉ)

Soit $G(X, E)$ un graphe. La connexité du graphe G est : $k(G) = \text{Min}_{x,y} k(x, y, G)$.

DÉFINITION 45 (H-CONNEXITÉ)

Un graphe est **h -connexe** si $k(G) > h$.

THÉORÈME 18 Le graphe $G(X, E)$ est h -connexe ssi $\forall x, y \in X$, il existe au mois h xy -chaînes deux à deux disjointes.

DÉFINITION 46 (ÉTOILE)

Soient $G(X, E)$ un graphe, $Y \subseteq X$ et $x \in X \setminus Y$. Une xY -**étoile** est un ensemble de chaînes 2 à 2 disjointes, sauf en x , de cardinal $|Y|$.

THÉORÈME 19 (DIRAC, 1960) *Un graphe $G(X, E)$ est h -connexe ($h \geq 1$) ssi $|X| \geq h + 1$ et $\forall Y \subseteq X$ tel que $|Y| = h, \forall x \in X \setminus Y$, il existe une xY -étoile.*

10 Flot maximum dans un réseau

10.1 Définitions

DÉFINITION 47 (RÉSEAU)

Un **réseau** est un triplet (X, U, c) où $G = (X, U)$ est un graphe orienté et $c : U \rightarrow \mathbb{R}^+$. $c(u)$ est la **capacité** de l'arc u .

On distingue deux sommets s et p qui sont appelés **source** et **puits**.

DÉFINITION 48 (FLOT)

Soit $R = (X, U, c)$ un réseau, s et p les source et puits. Un flot φ est une application de U dans \mathbb{R} vérifiant :

1. *pseudo-symétrie* $\forall x, y \in X, \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$;
2. *contraintes de capacité* $\forall u \in U, \varphi(u) \leq c(u)$;
3. *loi de conservation ou 1^o loi de Kirschhoff* $\forall x \in X \setminus \{s, p\}, \varphi(x, X) = \sum_{y \in X} \varphi(x, y) = 0$
4. On a aussi $\varphi(x, y) = 0$ si $xy \notin U$ et $yx \notin U$.

Par convention, on pose $\varphi(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \varphi(x, y)$.

DÉFINITION 49

La **valeur d'un flot** φ est $\sum_{x \in X} \varphi(s, x) = \varphi(s, X)$ notée $|\varphi|$.

10.2 Méthode de Ford-Fulkerson

DÉFINITION 50 (CAPACITÉ RÉSIDUELLE D'UN ARC)

Avec les notations précédentes, c'est $c_\varphi(u) = c(u) - \varphi(u)$.

DÉFINITION 51

Le **réseau des écarts** est $R_\varphi = (X, U_\varphi, c_\varphi)$ où U_φ est l'ensemble des arêtes dont la capacité résiduelle est strictement positive.

REMARQUE 6 Attention, lors de la construction du graphe des écarts, ne pas oublier les arêtes qui n'étaient pas présentes au début, après la transformation elle n'ont pas forcément une capacité résiduelle nulle.

LEMME 4 Soit un réseau $R = (X, U, c)$ et φ un flot sur R . Soit φ' un flot sur R_φ . Alors $\varphi + \varphi'$ est un flot de valeur $|\varphi| + |\varphi'|$.

DÉFINITION 52

Etant donné un réseau $R = (X, U, c)$ et φ un flot sur R , un **chemin améliorant** relativement à φ est un chemin de s à p dans R_φ .

DÉFINITION 53 (CAPACITÉ RÉSIDUELLE D'UN CHEMIN)

La **capacité résiduelle** d'un chemin améliorant μ est $c_\varphi(\mu) = \text{Min}\{c_\varphi(u) \mid u \in U\}$.

LEMME 5 Soient $R = (X, U, c)$ un réseau, φ un flot et μ un chemin améliorant. Alors φ_μ défini par :

$$\varphi_\mu(u) = \begin{cases} c_\varphi(\mu) & \text{si } u \in \mu \\ -c_\varphi(\mu) & \text{si } \bar{u} \in \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un flot de valeur $c_\varphi(\mu)$.

COROLLAIRE 1 Avec les mêmes notations, $\varphi' = \varphi + \varphi_\mu$ est un flot de valeur $|\varphi| + |\varphi_\mu| > |\varphi|$

DÉFINITION 54 (COUPE)

- Une **coupe** dans $R = (X, U, c)$ est une partition de X en (Y, \bar{Y}) avec $s \in Y$ et $p \in \bar{Y}$.
- La **capacité** de la coupe est $c(Y, \bar{Y}) = \sum_{y \in Y} \sum_{z \in \bar{Y}} c(y, z)$.
- Le **flot** à travers la coupe est $\varphi(Y, \bar{Y})$.

LEMME 6 Pour toute coupe (Y, \bar{Y}) d'un réseau R : $|\varphi| = \varphi(Y, \bar{Y})$.

COROLLAIRE 2 Soit φ un flot sur R et (Y, \bar{Y}) une coupe. Alors $|\varphi| \leq c(Y, \bar{Y})$.

THÉORÈME 20 (FORD ET FULKERSON) Soit φ un flot sur un réseau $R = (X, U, c)$. Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

1. φ est un flot maximum ;
2. Il n'existe pas de chemin améliorant ;
3. Il existe une coupe (Y, \bar{Y}) telle que $|\varphi| = c(Y, \bar{Y})$.

REMARQUE 7 C'est l'équivalence 1 \Leftrightarrow 3 qui nous intéresse pour construire l'algorithme du paragraphe suivant.

10.3 Algorithme d'Edmonds Karp

- Dans le graphe initial, noter les arêtes manquantes avec une capacité nulle.
- Chercher un plus court chemin de s à p en termes d'arcs. Calculer la capacité du chemin et ensuite calculer le flot φ_μ comme dans le lemme 5.
- Recommencer en recalculant le nouveau graphe des écarts, jusqu'à ce qu'il n'existe plus de chemin améliorant.
- Le flot de s ou de p est égal au flot maximum. Pour avoir la pondération des arêtes, renverser les flèches dans le nouveau graphe.

11 Coloration de graphes

On note $\Delta(G) = \max_{x \in X} d(x)$ le degré d'un graphe $G = (X, E)$.

11.1 Indice chromatique

DÉFINITION 55

On appelle **indice chromatique** d'un graphe et on note $\chi'(G)$ le cardinal minimal d'une partition de E en couplages, c'est donc le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de sorte que deux arêtes adjacentes n'aient pas la même couleur.

On a les résultats suivants :

PROPOSITION 9

- $\Delta(G) \leq \chi'(G)$
- $\lceil \frac{|E|}{\nu(G)} \rceil \leq \chi'(G)$ où $\nu(G)$ est le cardinal maximal d'un couplage.

Pour les graphes complets :

THÉORÈME 21

- $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.
- $\chi'(K_{2n+2}) = 2n + 1$.

THÉORÈME 22 (VIZING, 1964) *Pour tout graphe $G = (X, E)$,*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

REMARQUE 8 Déterminer si c'est $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$ est NP-complet.

11.2 Nombre chromatique

DÉFINITION 56

On appelle **nombre chromatique** d'un graphe et on note $\chi(G)$ le cardinal minimum d'une partition de G en stables ou encore le plus petit nombre de couleurs tel que l'on puisse colorier les sommets de G de façon à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

REMARQUE 9 Remarquons que :

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ n'a pas d'arête.
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ biparti.
- K_n est n -coloriable.

PROPOSITION 10 Soit $G = (X, E)$ un graphe, on note $\alpha(G)$ le nombre de stabilité, c'est à dire la taille d'un stable maximum. Alors on a :

$$\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$$

THÉORÈME 23 (TUTTE, 1954) $\forall k \geq 2$, il existe un graphe sans triangle k -chromatique.

THÉORÈME 24 (NORDHAUS ET GADDUM, 1960) Soit $G = (X, E)$ un graphe et son complémentaire $\bar{G} = (X, \bar{E})$ où $\bar{E} = \mathcal{P}_2(X) \setminus E$. Alors :

$$1 \quad \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$$

$$2 \quad \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

$$1' \quad \chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq 2\sqrt{n}$$

$$2' \quad \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$