Partiel du 22 novembre 2001
documents manuscrits autorisés
durée : 2 heures

Exercice 1
Soient L et L' des langages sur un alphabet Σ.

1. On suppose que L est fini. Alors, si $L \cup L'$ est rationnel, L' est-il rationnel ? Si LL' est rationnel, L' est-il rationnel ?
2. Les questions précédentes sous l'hypothèse que L est rationnel.
3. Si L^* est rationnel, L l'est-il nécessairement ?

Exercice 2
On appelle langage local tout ensemble L de mots sur un alphabet fini Σ pour lequel il existe des parties D et F de Σ et une partie W de Σ^2 telles que :

$$L = (D\Sigma^* \cap \Sigma^* F)\backslash \Sigma^* W \Sigma^* \text{ ou } L = \{\epsilon\} \cup (D\Sigma^* \cap \Sigma^* F)\backslash \Sigma^* W \Sigma^*.$$

1 - Montrer que les langages suivants sont locaux sur l'alphabet $\{a, b\}$:

$$a^*,\ (ab)^*,\ a^* \cup b^*,\ \{a\},\ \{ab\}.$$

On explicitera les ensembles D, F et W convenables.

2 - Montrer que tout langage local est rationnel.

3 - Montrer que la famille des langages locaux est fermée par intersection et opération étoile.

4 - Montrer que cette famille n'est fermée ni par réunion ni par produit.

Exercice 3
On donne la table de multiplication non associative suivante :

*	a	b	c
a	a	a	c
b	c	a	b
c	b	c	a

On note val(u) le résultat de l'évaluation de gauche à droite du mot u selon la table ci-dessus. Les langages suivants sont-ils rationnels ?

$$L_1 = \{xy \mid |x| = |y| \text{ et } val(x) = val(y)\}$$
$$L_2 = \{xy \mid val(x) = val(y)\}$$

Exercice 4

On considère les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$:

- $L_1 = \{a\}\{b^i a^i,\ i \geq 1\}^*$,
- $L_2 = \{a^i b^{2i},\ i \geq 1\}^*$.

1 - Vérifier que ces langages sont des langages algébriques déterministes.

2 - On rappelle que le langage $L_1^{-1}L_2$ est l'ensemble des mots u sur $\{a, b\}$ pour lesquels il existe v de L_1 tel que $vu \in L_2$.
Le langage $L_1^{-1}L_2$ est-il algébrique ?

Exercice 5

Si u et v sont des mots sur un alphabet Σ, on pose $u \longleftarrow v = \{svt \mid st = u\}$ et si L et L' sont des langages sur Σ, $L \longleftarrow L'$ désigne le langage $\bigcup_{u \in L, v \in L'} u \longleftarrow v$.

Pour tout entier n positif, on définit $L \longleftarrow^n L'$ par $L \longleftarrow^0 L' = L$ et
$L \longleftarrow^{n+1} L' = (L \longleftarrow^n L') \longleftarrow L'$ pour $n \geq 0$.

On pose enfin $L \longleftarrow^* L' = \bigcup_{n \geq 0} L \longleftarrow^n L'$.

1 - Soit $L = \{\epsilon, ab\}$, calculer $L \longleftarrow^2 L$.
Démontrer que le langage $L \longleftarrow^* L$ est un langage algébrique sur $\{a, b\}$.

2 - La classe des langages algébriques est-elle stable pour l'opération $\longleftarrow^*$?