TD 1 de Langages Formels
MIM2, 2001-2002

Laure Danthony
Eléments de correction

27 septembre 2001

1 Miroirs

Si on prend comme suggéré $v = x^m yyx^m \overline{u}$:
- $uv \in L$ est trivial.
- Par l'absurde. Si on suppose $u_i v \in L$, on en déduit u préfixe (propre) de u_i et donc $|u| < |u_i|$. Alors à l'aide de $|u| + 1 \leq |u_i| \leq m + |u|$, on montre que $u_i v$ ne peut pas être un palindrome.

2 Bords

Soit $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ avec $a_1 = a$. Il suffit alors de prendre $v = b^n$. Pour le montrer, supposons que uv aît un bord w. On a alors forcément $|w| > n$ car sinon on auraît $a_1 = b$ (faire un dessin !). Alors donc $|w| = n+i$ avec $1 \leq i \leq n-1$. En lisant w selon les lectures préfixes et suffixes, on obtient l'égalité $w = a_1 a_2 \ldots a_n b^i = a_{n-i+1} \ldots a_n b^n$. Donc $a_n = b$. Donc $w = aa_2 \ldots a_{n-1} b^{i+1} = a_{n-i+1} b^{n+1}$. On obtient cette fois $a_{n-1} = b$ et en itérant le procédé on obtient $ab^{n+i+1} = b^{n+i}$. On obtient donc une contradiction et uv n'a pas de bord.

3 Codes

1. Codes ou non ?
   - X_1 n'est pas un code : considérer *abbaabaabaa*.
   - X_2 est un code : si on essaie de construire un contre-exemple qui commence par a, on est obligé de considérer en parallèle *ab* et *abaa*. Pour combler le déficit du premier mot, on est obligé de lui rajouter *aaaa*, puis de même on est obligé ensuite de rajouter *aaaa* au deuxième, c'est sans fin. On arrive à une même suite infinie si on veut construire un contre-exemple commençant par b.
   - X_3 est un code : raisonner comme précédemment.
   - X_4 n'est pas un code : considérer *baaba*.
2. C'est trivial.
3. On va utiliser le résultat du cours : si (u, v) est solution d'une équation aux mots à deux variables sans constantes, alors ils commutent. Ensuite

on a le résultat : les mots u et v commutent ssi ils sont puissances d'un même mot.
- $\Rightarrow$ Si u et v commutent, comme $u \neq v$, ce n'est pas un code.
- $\Leftarrow$ Si ce n'est pas un code, cela veut dire que (u, v) est solution d'une équation aux mots non triviale à 2 inconnues et sans constante donc ils commutent.

4. Supposons que X préfixe ne soit pas un code. Prenons le plus petit mot qui a deux écritures différentes. Alors on a l'égalité du type $x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_l$. On a prit le plus petit mot donc $x_1 \neq y_1$ avec x_1 préfixe de y_1 ou le contraire. Il y a une contradiction car X est suffixe.

4 Centre d'un langage

1. Les facteurs gauches :
   - $FG(L_1) = L_3$
   - $FG(L_2) = \{a\}^*\{b\}^*$
   - $FG(L_3) = L_3$
   - $FG(L_4) = A^*$
2. Centre :
   - $C_(L_1) = \{a\}^*$, $C_(L_2) = \{a\}^*\{b\}^*$, $C_(L_3) = \{a\}^*$, $C_(L_1) = A^*$,
   - Le résultat : $C(L \cup L') = C(L) \cup C(L')$ se montre facilement par double inclusion, par contre

$$C(LL') = \begin{cases} C(L) & \text{si L' est fini} \\ FG(L) \cup L.C(L') & \text{sinon} \end{cases}$$

   est un peu plus délicat, notamment le sens gauche-droite ou on distingue le cas où u "déborde" sur L' ($u \notin FG(L)$) du cas où il ne déborde pas. Il reste à traiter le cas $C(L^+)$. On sait que $L^+ = L.L^*$ donc en appliquant le résultat précédent, comme L^* est infini, on obtient $C(L^+) = L.C(L^*) \cup FG(L)$. Or $C(L^*) = C(L^+) \cup C(L)$ toujours en appliquant un des résultats précédents. On obtient donc pour $X = C(L^*)$ l'équation aux langages suivante : $X = \big(FG(L) + L.C(L)\big)$ de solution d'après le Lemme d'Arden $X = L^*.\big(FG(L) + L.C(L)\big)$. Voilà !

5 Résiduels

- Pour les résiduels de L : si $u = a^k$, $u^{-1}L = a^*b^*$, si $u = a^k b^i$, $i > 0$, $u^{-1}L = b^*$, sinon, le résiduel est vide.
- Pour les résiduels de L' : si $u = a^i B^j$ avec $j \geq i$, l'ensemble des résiduels est les b^{i-j}, pour $u = a^i b^j$ avec $i < j$ et les autres mots, l'ensemble des résiduels est vide.
- Trivialement, $x^{-1}(L \cup L') = x^{-1}L \cup x^{-1}L'$. Pour les autres, il faut un peu plus réfléchir !