

Mots et langages formels

Exercice 1

On appelle image miroir d'un mot u sur un alphabet Σ (ou simplement miroir de u) le mot \bar{u} ainsi défini :

- si $u = \epsilon$ alors $\bar{u} = \epsilon$,
- si $u = a_1 a_2 \dots a_n$ alors $\bar{u} = a_n a_{n-1} \dots a_1$.

Soit L l'ensemble des mots u sur Σ tels que $u = \bar{u}$. On suppose que Σ contient au moins deux lettres.

Soient u, u_1, u_2, \dots, u_n des mots sur Σ tels que u soit distinct de tous les u_i et $|u| \leq |u_i|$ pour tout i . Démontrer qu'il existe un mot v sur Σ tel que $uv \in L$ et $u_i v \notin L$ pour tout i . (On pourra considérer $v = x^m y y x^m \bar{u}$ où x et y sont des lettres de Σ et $m = \sup\{|u_i| - |u|, 1 \leq i \leq n\}$).

Exercice 2

On appelle bord d'un mot u sur un alphabet Σ tout mot v non vide qui est à la fois préfixe et suffixe de u .

Prouver que si Σ est un alphabet contenant au moins deux lettres, pour tout mot u non vide sur Σ , il existe un mot v sur Σ tel que uv n'a pas de bord.

Exercice 3

On appelle code sur un alphabet A tout langage X sur A tel que $x_1 x_2 \dots x_p = y_1 y_2 \dots y_q$ et $x_i \in X$ pour tout i et $y_j \in X$ pour tout j entraînent $p = q$ et $x_i = y_i$ pour tout i . Dire que X est un code revient donc à dire que tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X .

a - Les langages suivants sont-ils des codes ?

- $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$
- $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$
- $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$
- $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$

b - Soit u un mot de A^* , montrer que la partie $\{u\}$ est un code si et seulement si $u \neq \epsilon$.

c - Soient u et v deux mots distincts de A^* , montrer que la partie $\{u, v\}$ est un code si et seulement si u et v ne commutent pas.

d - Soit X une partie de A^* ne contenant pas ϵ et telle qu'aucun mot de X ne soit préfixe propre d'un autre mot de X . Montrer que X est un code. (Un tel code est appelé code préfixe.)

Exercice 4

Soit L un langage sur un alphabet A . On désigne par $FG(L)$ l'ensemble des facteurs gauches (ou préfixes) de L .

a - Trouver l'ensemble des facteurs gauches de chacun des langages suivants sur l'alphabet $A = \{a, b\}$:

- $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$
- $L_2 = \{a^n b^m, 0 \leq n \leq m\}$
- $L_3 = \{a^n b^m, 0 \leq m \leq n\}$
- $L_4 = \{u \in A^*, |u|_a = |u|_b\}$

b - On appelle centre de L , et on note $c(L)$, l'ensemble des mots u de A^* tels que $\text{Card}(uA^* \cap L)$ soit infini. Calculer $c(L)$ pour les quatre langages ci-dessus.

Que valent $c(L \cup L')$, $c(LL')$ et $c(L^+)$ en fonction de $c(L)$ et $c(L')$?

Exercice 5

Soit L un langage sur un alphabet A , et soit u un mot sur A . On appelle résiduel à gauche de L par rapport à u , et on note $u^{-1}L$ l'ensemble des mots v sur A tels que $uv \in L$.

a - Calculer le résiduel de L par rapport à tout mot u sur $A = \{a, b\}$ dans les exemples suivants :

$$L = \{a\}^* \{b\}^* \text{ puis } L' = \{a^n b^n, n \geq 0\}$$

Si x est une lettre de A , que valent $x^{-1}(L \cup L')$, $x^{-1}(LL')$ et $x^{-1}L^*$?